Lesson 5

Transformations géométriques

PLAN

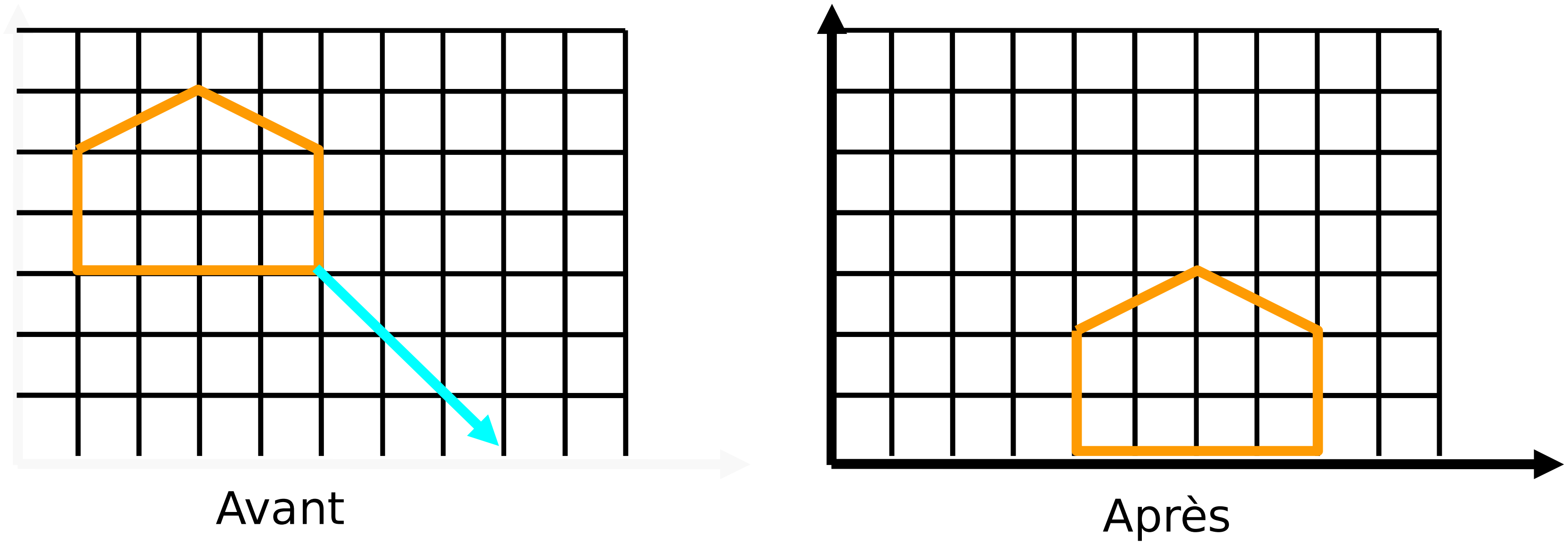
1. Transformation en 2D
2. Transformations en coordonnées homogènes
3. Transformation en 3D
4. Définition d’objets complexes
5. Projection

1- En 2 dimensions

- On commence en 2D
  - Plus facile à représenter
- Chaque point est transformé:
  - $x' = f(x,y)$
  - $y' = g(x,y)$
- Comment représenter la transformation ?

Translations

- Modification simple :
  - $x' = x + t_x$
  - $y' = y + t_y$



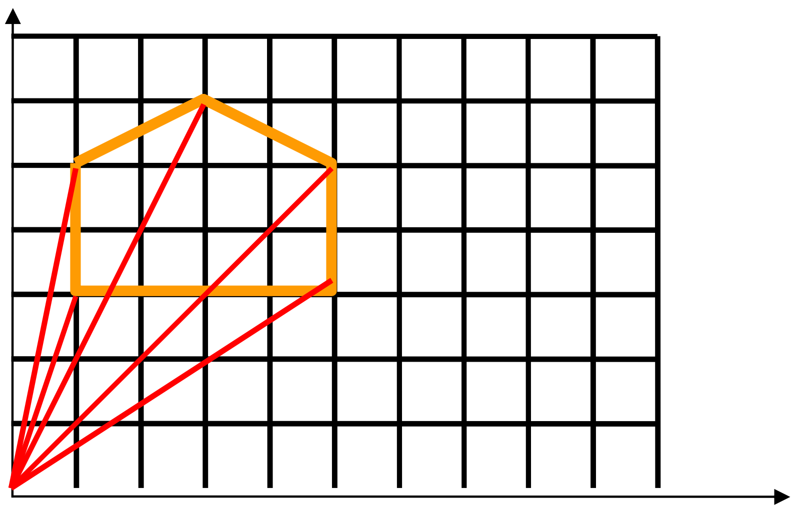
Notation vectorielle

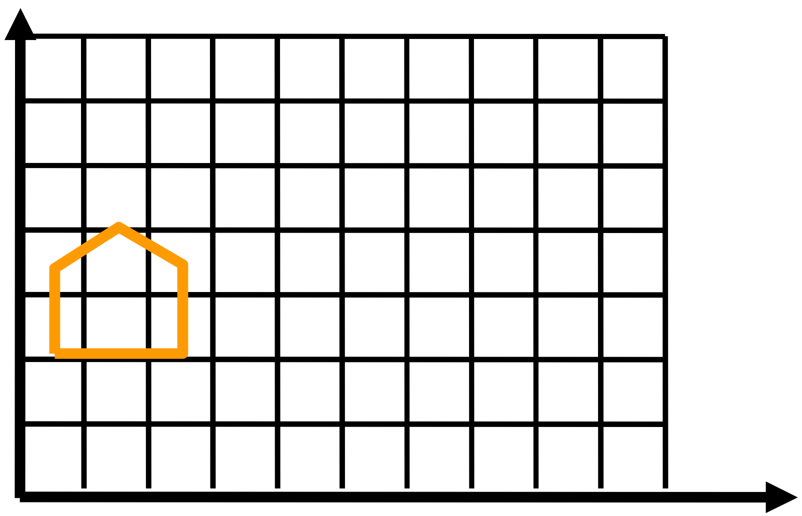
- On utilise des vecteurs pour la représentation
  - C'est plus simple
- Un point est un vecteur : $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- Une translation est une somme vectorielle

P' = P + T

Changement d'échelle

- Les coordonnées sont multipliées par le facteur de changement d'échelle :
  - $x' = s_x\,x$
  - $y' = s_y\,y$





Notation matricielle

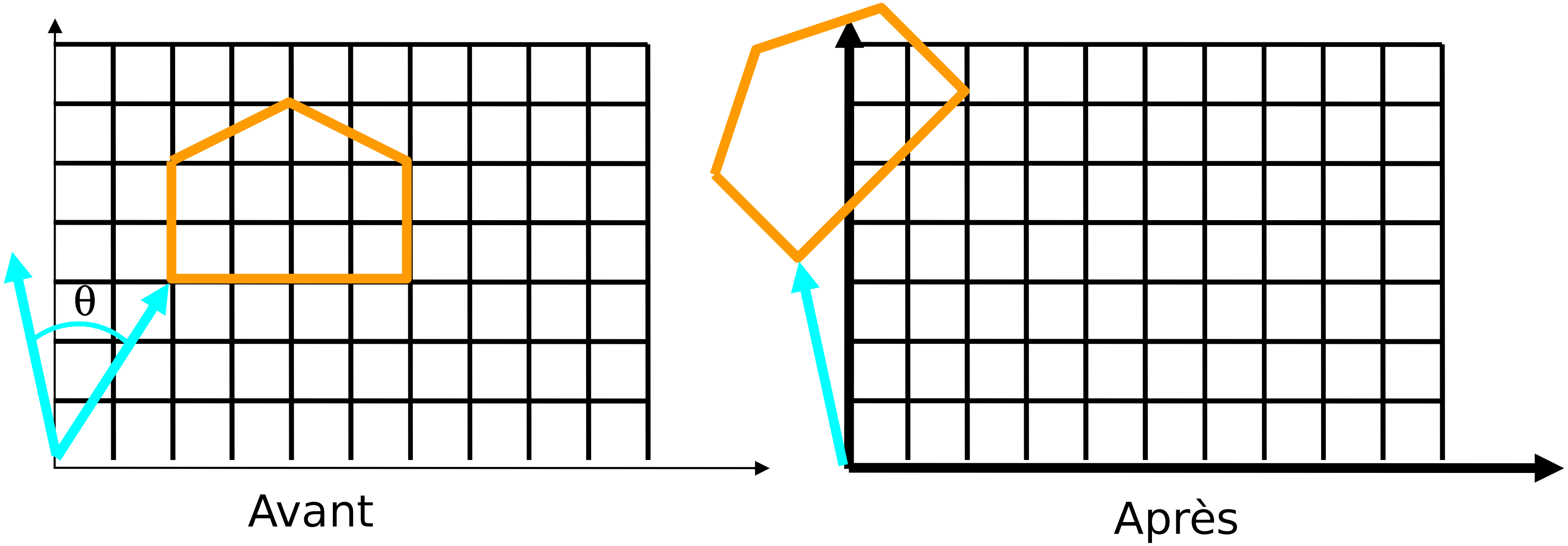
- C'est une multiplication matricielle :

P' = **S**P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotation

- Rotation en 2D :
  - $x' = \cos\theta \, x - \sin\theta \, y$
  - $y' = \sin\theta \, x + \cos\theta \, y$



Notation matricielle

- Rotation = multiplication matricielle :

  P'=**R**P

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Unification

- Notation simple, Mais pas vraiment unifiée
  - Addition ou bien multiplication
  - Comment faire pour concaténer plusieurs transformations ?
- On veut une notation unique qui permet de noter aussi les combinaisons de transformations

2- Coordonnées homogènes

- Outil géométrique très puissant :
  - Utilisé partout (Image, Vision, Robotique)
- On ajoute une troisième coordonnée, *w*
- Un point 2D devient un vecteur à 3 coordonnées

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

- Deux points sont égaux si et seulement si :
  - $x'/w' = x/w$ et $y'/w' = y/w$
- $w=0$: points « à l'infini »
  - Très utile pour les projections, et pour certaines splines

Translations en c. homogènes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = \dfrac{x}{w} + t_x \\ \dfrac{y'}{w'} = \dfrac{y}{w} + t_y \end{cases}$$

Changement d'échelle

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = s_x \dfrac{x}{w} \\ \dfrac{y'}{w'} = s_y \dfrac{y}{w} \end{cases}$$

Rotation

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \cos\theta \frac{x}{w} - \sin\theta \frac{y}{w} \\ \frac{y'}{w'} = \sin\theta \frac{x}{w} + \cos\theta \frac{y}{w} \end{cases}$$

Composition des transformations

- Il suffit de multiplier les matrices :
  - composition d'une rotation et d'une translation:

    M = RT

- Toutes les transformations 2D peuvent être exprimées comme des matrices en coord. homogènes

Rotation autour d'un point Q

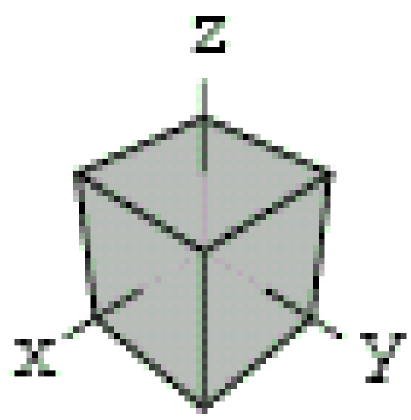
- Rotation autour d'un point Q:
  - Translater Q à l'origine ($\mathbf{T}_Q$),
  - Rotation autour de l'origine ($\mathbf{R}_\Theta$)
  - Translater en retour vers Q ($\mathbf{-\ T}_Q$).

$$P' = (\mathbf{-T}_Q)\mathbf{R}_\Theta \mathbf{T}_Q \, P$$

3- En 3 dimensions

- On introduit une quatrième coordonnée, *w*
  - Deux vecteurs sont égaux si :
    $x/w = x'/w'$, $y/w = y'/w'$ et $z/w=z'/w'$
- Toutes les transformations sont des matrices 4x4

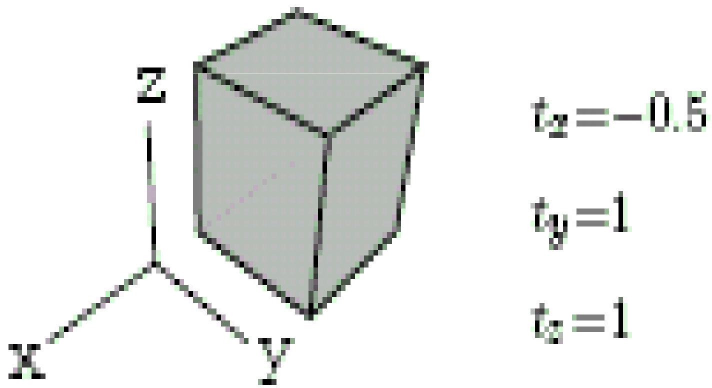
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$



Translations en 3D

$$T(t_x, t_y, t_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ z' = z + wt_z \\ w' = \quad w \end{cases}$$



Changement d'échelle en 3D

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ z' = s_z z \\ w' = w \end{cases}$$

Rotations en 3D

- Rotation : un axe et un angle
- La matrice dépend de l'axe et de l'angle
- Expression directe possible, en partant de l'axe et de l'angle, et quelques produits vectoriels
- Les rotations autour d'un axe de coordonnées ont une expression simple
  - Les autres rotations s'expriment comme combinaison de ces rotations simples

Rotation autour de l'ace des x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'ace des y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotation autour de l'ace des z

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

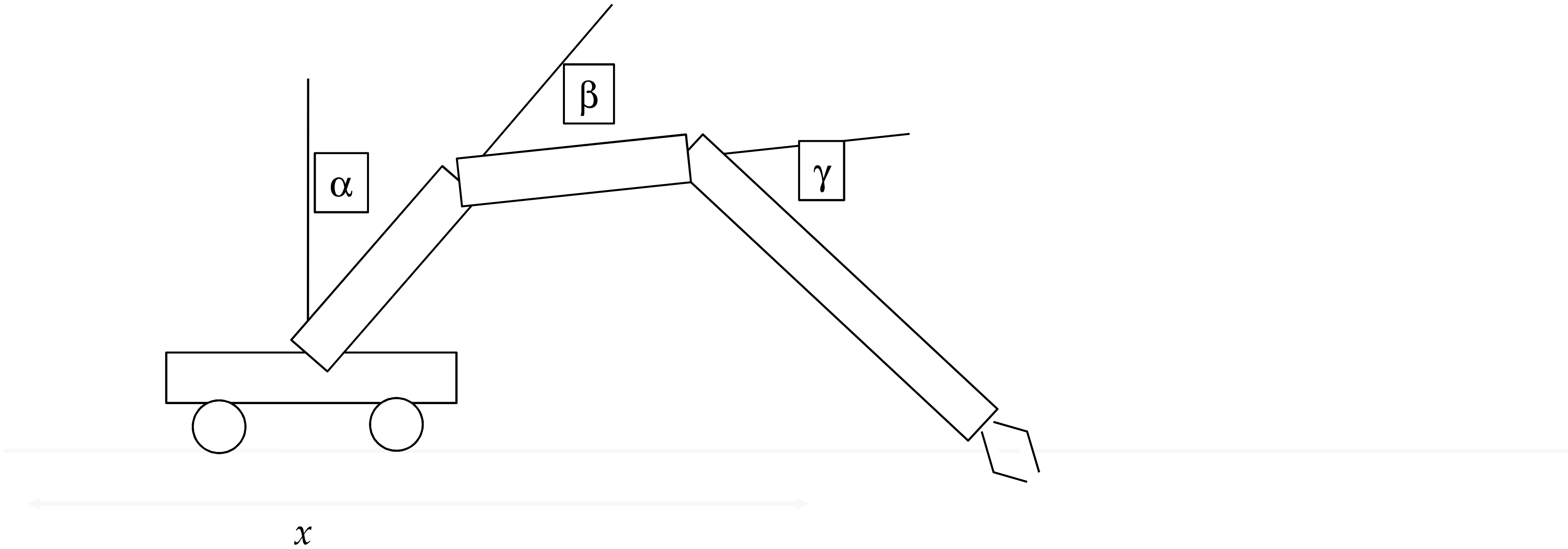
$$R_z(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toutes les transformations 3D

- Toutes les transformation 3D s’expriment comme combinaison de translations, rotations, changement d’échelle et donc comme une matrice en coordonnées homogènes.
- MAIS ATTENTION CAR:
- La multiplication de matrice n’est pas commutative
- L’ordre des transformations est important
  - Rotation puis translation aura un effet très différent de translation puis rotation
  - L’ordre des angles d’Euler est un grand classique
  - Une source de bugs très courante

4- Definition d'objets complexes

Exemple de modèle



Definir un objet complexe

- L'objet est défini comme une combinaison d'objets plus petites
  - Exemples : robots, voiture, roue…
- On veut un comportement normal :
  - L'objet reste connecté : si je bouge le bras, la main suit
  - Utiliser les paramètres naturels : x,α,β,γ
- Pour cela, on utilise les coordonnées relatives
  - La position de la roue par rapport à la voiture
  - La position des boulons par rapport à la roue

Coordonnées relatives

- Utiliser les coordonnées relatives :
  - La position de l'avant-bras est donné en fonction du bras
- Mais il faut bien revenir aux coordonnées absolues :
  - On utilise une concaténation des transformations :
    - Translation sur la position du bras
    - Dessiner le bras
    - Translation sur la position de l'avant-bras par rapport au bras
    - Rotation
    - Dessiner l'avant-bras
  - Je veux revenir aux coordonnées du bras, ou de l'épaule
    - Que faire ?

Pile de transformations

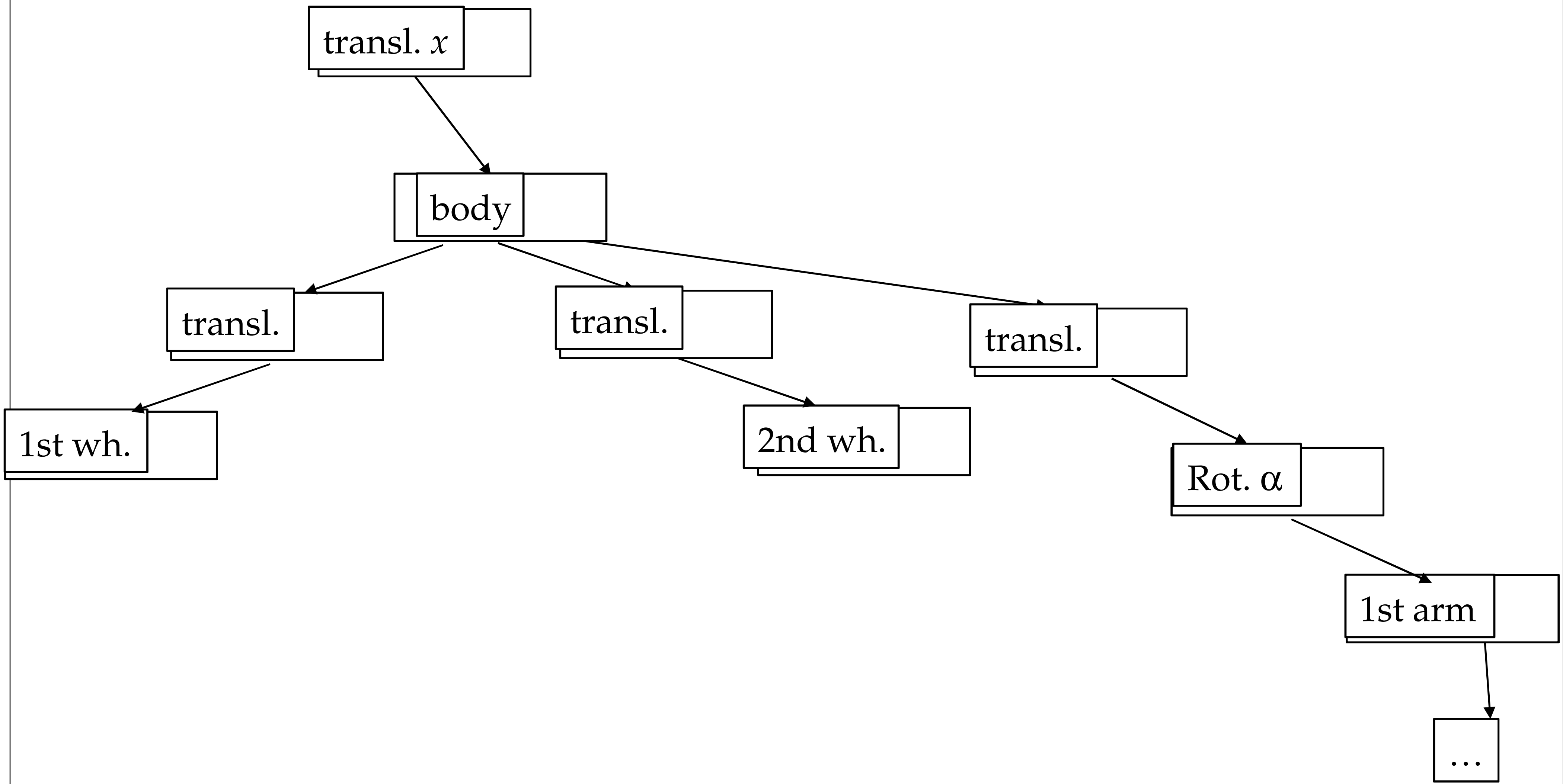
- Garder l'information sur les transformations successives
  - initialement= **M**, à partir du model vers le plan de vue
  - **M'=MT** (translation sur l'axe des x)
  - Dessin du corps du robot
  - **M''=M'T1** (translation vers le centre de la 1ere roue)
  - Dessiner la première roue comme un cercle de centre (0,0)
  - Retourner à **M'**
  - **M'''=M'T2** (translation vers le centre de la 2ème roue)
  - Dessin de la seconde roue

Définition hiérarchique

- Comment savoir quelle est la bonne transformation ?
- Comment savoir qu'il est temps de revenir à la transformation précédente ?

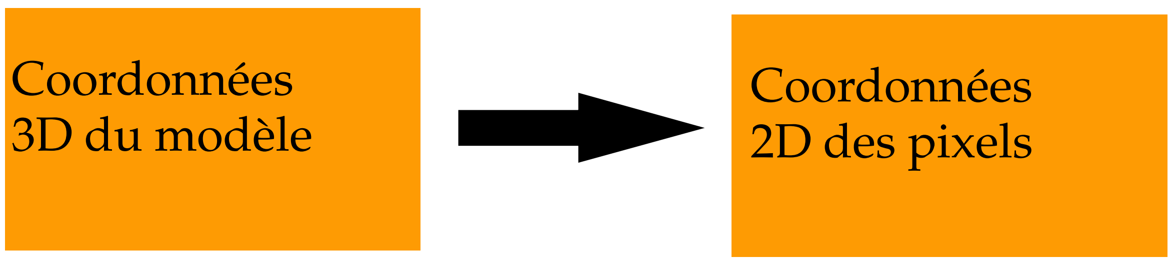
- > Définition hiérarchique des objets
- Dessiner l'objet = traversée de la hiérarchie

Objet défini hiérarchiquement



5-Projections et perspectives

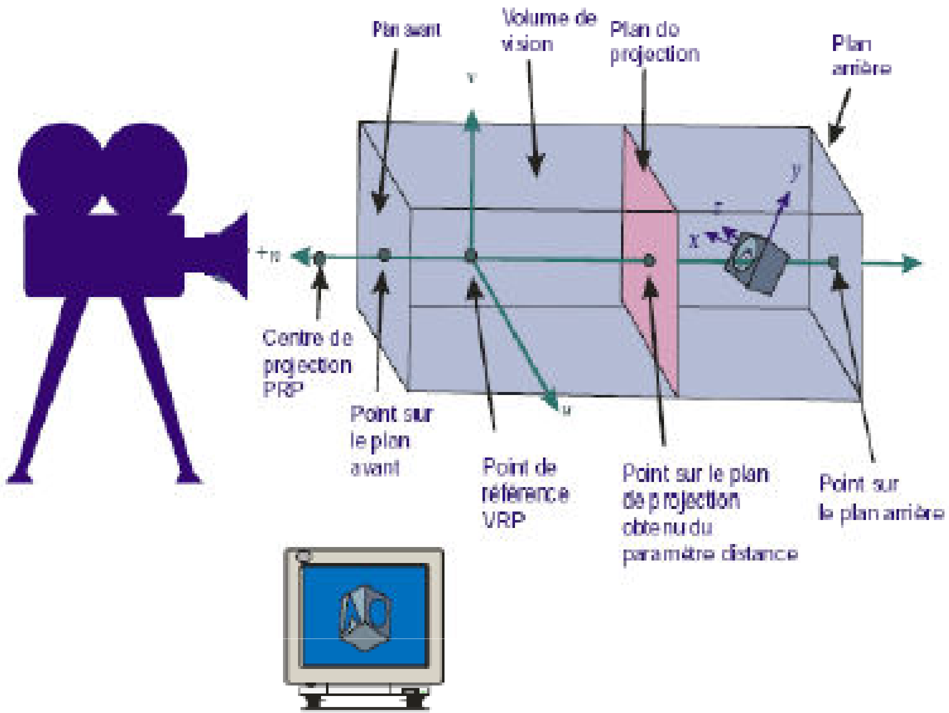
- Affichage d'un modèle 3D sur une fenêtre 2D
- Transformation des coordonnées 3D du modèle vers les coordonnées 2D des pixels
- Représentation d'une scène 3D, pour un observateur virtuel possède un point de vue (position de l'observateur), une direction de visée (direction vers laquelle est tourné l'observateur) et une direction « en haut » (la verticale pour l'observateur)



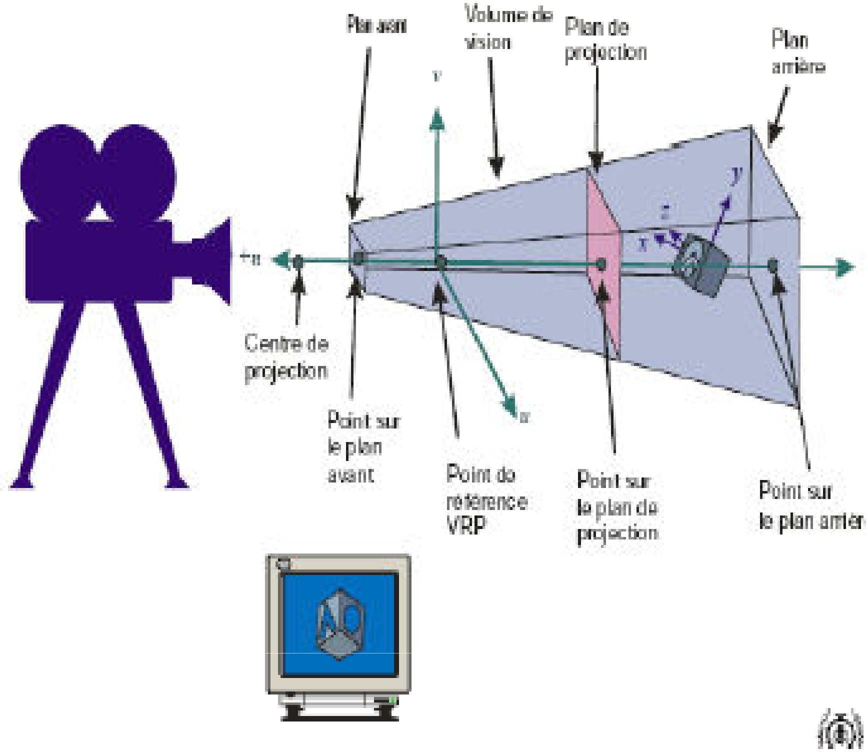
Différent types de projections

- Projections parallèles :
  - Pas de rétrécissement des objets dans le lointain
  - Plusieurs types de projections parallèles :
    - isométrique, cavalière,…
- Projection perspective :
  - Les objets lointains sont plus petits
  - Plusieurs types :
    - Un, deux ou trois points de fuite

Différent types de projections



Projection parallèle



Projection perspective

Matrices de projection

- Projection parallèle sur le plan *z=0* :
  - $x'=x, y'=y, w'=w$
- Matrice de projection :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

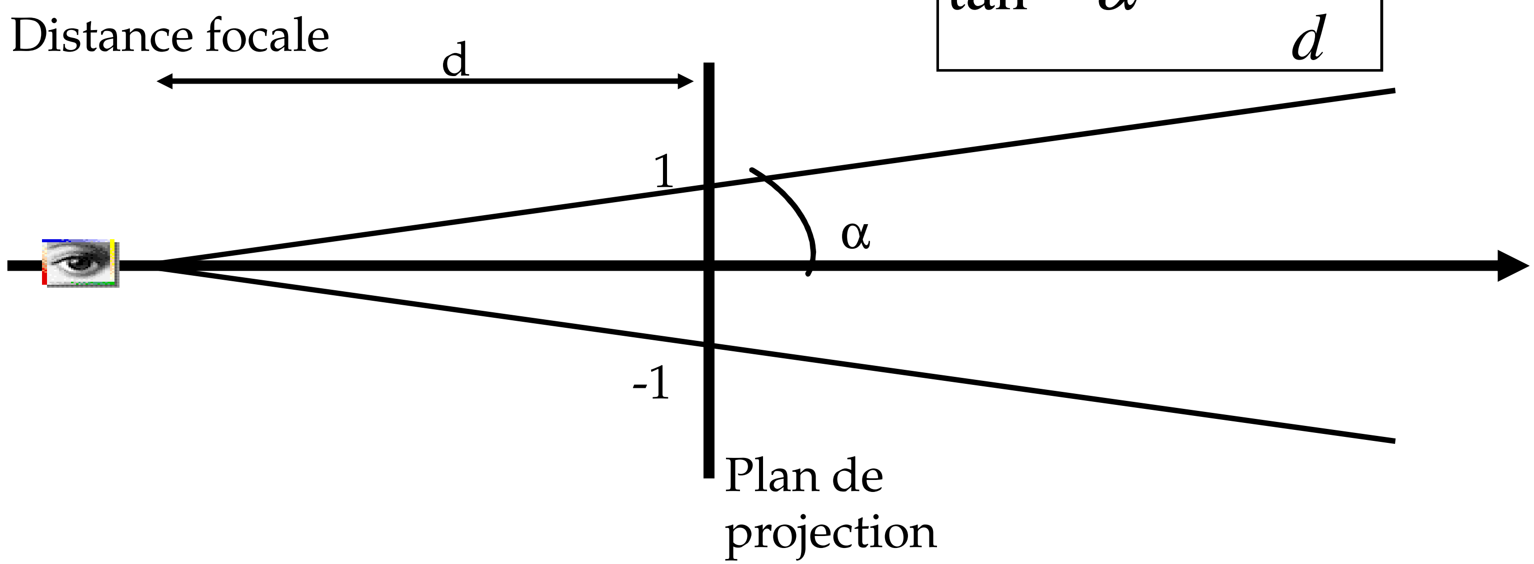
- Projection sur le plan *z=0*, avec le centre de projection placé à *z=-d*:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 1 \end{bmatrix}$$

Ouverture de vue

- Le distance focale n'est pas un paramètre intuitif
- Ouverture de vue : plus simple
  - Angle
  - Exprime la largeur du champ visuel

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{1}{d}}$$



Coordonnées homogènes

- Essentielles pour la perspective
- La rétrécissement des objets utilise *w*

$$w' = \frac{z}{d} + w$$

- Impossible sans coordonnées homogènes