Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre de A
2. Déterminer le spectre de A. Déduire que A est diagonalisable et déterminer une matrice diagonale D semblable à A.
3. Déterminer une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$
4. Déterminer P^{-1}

Exercice 2

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x-1, 2x+2y)$. f est-elle une application linéaire ?
2. E est un espace vectoriel de dimension 3. Déterminet la matrice assocée à l'application f définie sur E par $f(x) = x$

Exercice 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice diagonale D est une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$

Exercice 4

1. Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_2[x] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[x] \\ & P & \longmapsto & P + \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx \end{array}$ est une application linéaire.
2. Déterminer la matrice de f relativement à la base $B = \mathcal{B} = (x^2,\ x,\ 1)$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
3. Déterminer les valeurs propres de f.

Exercice 5

1. Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

   $$U = (1,0,1), \quad V = (1,-1,0) \quad \text{et } W = (0,2,1)$$

   (U, V, W) est-elle une base de E ?
2. Trouver une matrice diagonale semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6

1. (e_1, e_2) étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui vérifie $f(e_1) = (1, 2-1)$ et $f(e_2) = (0,-1,1)$, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'application f.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver un vecteur propre associé à la vaeur propre $\lambda = 1$.

Exercice 7

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2 est-elle une valeur propre de A.

2. Trouver les valeurs propre de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 8

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2 est-elle une valeur propre de A.
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 9

1. Soit l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x+1, x+2y)$. f est-elle une application linéaire ?
2. E est un espace vectoriel de dimension n. Déterminet la matrice assocée à l'application f définie sur E par $f(x) = x$

Exercice 10

1. Soit l'application linéaire $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ u(x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x-y) \end{array}$. Déterminer la matrice associée à f relativement à la base canonique.
2. Trouver une matrice diagonale semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 11

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice diagonale D est une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$

Exercice 12

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice diagonale D est une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$

Exercice 13

1. (e_1, e_2) étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire qui vérifie $f(e_1) = (1, 2-1)$ et $f(e_2) = (0, -1, 1)$, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'application f.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver un vecteur propre associé à la vaeur propre $\lambda = 1$.

Exercice 14

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2 est-elle une valeur propre de A.
2. Trouver les valeurs propre de $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
3. Trouver une matrice diagonale semblable à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 15

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. 2 est-elle une valeur propre de A.
2. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 16

1. $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est une application linéaire tel que la matrice associé à g, relativement à la base canonique, est $M_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application g.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ Trouver un vecteur propre associé à la vaeur propre $\lambda = 2$.

Exercice 17

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A. ($\lambda_1 < \lambda_2$).
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, Déterminer une matrice diagonale D Semblable à A.
3. Déterminer une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.
4. Déterminer la matrice P^{-1}.
5. Trouver une matrice carrée B tel que $B^2 = A$.

Exercice 18

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 de A.
2. (a) Déduire que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice diagonale D, semblable à A.
3. Déterminer une matrice inversible P tel que $A = PAP^{-1}$.
4. Soit $n \in$. Déterminer A^n en fonction de n.

Exercice 19

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres λ_1 et λ_2 de A. ($\lambda_1 < \lambda_2$).
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, Déterminer une matrice diagonale D Semblable à A.
3. Déterminer une matrice inversible P tel que $A = PDP^{-1}$.
4. Déterminer la matrice P^{-1}.
5. Soient les suites u_n et v_n définies sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel non nul n

$$\begin{cases} u_n &= u_{n-1} + 2v_{n-1} \\ v_n &= -3u_{n-1} - 4v_{n-1} \end{cases}$$