UE

Mathématiques 1

ECUE

Algèbre 1

Haj Dahmane Dhafer

I-S-E-T Jerba

http://www.isetjb.rnu.tn

14 décembre 2012

Table des matières

Chapitre 1

Polynômes

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$

1.1 Généralités

Définition 1.1.1 *On dit qu'une application P de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'il existe un entier naturel n et des éléments a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ de $\mathbb{K}$ pour les quels on a : pour tout élément x de $\mathbb{K}$*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

Proposition 1.1.1 *Si P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ alors*

1. *$P + Q$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.*
2. *PQ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Notation L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[x]$.

Définition 1.1.2 *Soient $P \in \mathbb{K}[x]$ et $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P si $P(a) = 0$.*

Exemple 1.1.1

1. 2 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 - 4x + 4$.
2. Le polynôme $Q(x) = x^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.
3. i et $-i$ sont deux racines complexes du polynôme $Q(x) = x^2 + 1$.

Définition 1.1.3 *Soient $P \in \mathbb{K}[x]$. On dit que P est un polynôme nul si, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = 0$.*

Théorème 1.1.1 *Un polynôme $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ est nul, si et seulement, si les a_i sont tous nuls.*

Corollaire 1.1.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. Supposons que l'on ait*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \text{ avec } n \leq m,$$

alors $\begin{cases} a_i = b_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n \\ b_i = 0 \text{ pour } i > n \end{cases}$

Définition 1.1.4 *Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme non nul de $\mathbb{K}[x]$.*

- *On appelle degré du polynôme P l'entier natrel*

$$deg(P) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \{i; \quad a_i \neq 0\}.$$

- *On appelle valuation du polynôme P l'entier natrel*

$$V(P) = \inf_{i \in \{1,\dots,n\}} \{i; \quad a_i \neq 0\}.$$

Convention

$$\deg(0) = -\infty \qquad et \qquad V(0) = +\infty.$$

Exemple 1.1.2

1. $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + \frac{5}{2}$; deg(p) = 4 et $V(0) = 0$.
2. $P(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x$; deg(P) = 2 et $V(0) = 1$.
3. $P(x) = 2$; deg(P) = 0 et $V(0) = 0$.
4. $P(x) = 0$; deg(P) = $-\infty$ et $V(P) = +\infty$.
5. $P(x) = 3x^8$; deg(P) = 8 et $V(0) = 8$.

Remarque 1.1.1

1. *Un polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est de degré inférieur ou égal à n. Il est de degré n si, et seulement si, $a_n \neq 0$.*
2. *Un polynôme est dit unitaire ou normalisé losque le coefficient du monôme de plus haut degré est égale à 1.*

Propriétés 1.1.1 *Soient P et Q deux plynômes de $\mathbb{K}[x]$ de degrés respectif n et m. on a :*

1. *$deg(PQ) = deg(p) + deg(Q)$.*
2. *$deg(P+Q) \leqslant \max(deg(p), deg(Q))$.*
3. *$PQ = 0$ alors $P = 0$ ou $Q = 0$.*

Définition 1.1.5 *Soit $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ un polynôme de $\mathbb{K}[x]$. On appelle polynôme dérivé de P, et on note P', le polynôme de $\mathbb{K}[x]$ défini par :*

$$P'(x) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1} \text{ si } 1 \leq n.$$

1.2 Division euclidienne

Théorème 1.2.1 *Soit A un polynôme et B un polynôme non nul. Il existe un couple unique (Q, R) de polynômes tels que*

$$A = BQ + R \text{ et } deg(R) < degB.$$

Algorithme de division suivant les puissances décroissantes

Exemple 1.2.1
Cherchons le quotient et le reste de la division euclidienne de $A(x) = 2x^3+3x$ par $B(x) = 3x + 1$.

$$\begin{array}{ccccccc|l}
2x^3 & + & 3\text{x} & & & & & 3x+1 \\ \cline{8-8}
2x^3 & + & \frac{2}{3}x^2 & & & & & \frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{29}{27} \\ \cline{1-3}
0 & - & \frac{2}{3}x^2 & + & 3x & & & \\
 & - & \frac{2}{3}x^2 & - & \frac{2}{9}x & & & \\ \cline{3-5}
 & & 0 & + & \frac{29}{9}x & & & \\
 & & & & \frac{29}{9}x & + & \frac{29}{27} & \\ \cline{5-7}
 & & & & 0 & - & \frac{29}{27} &
\end{array}$$

d'où

$$2x^3 + 3x = (3x + 1)\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{29}{27}\right) - \frac{29}{27}.$$

Autrement dit $\begin{cases} R(x) = \dfrac{29}{27} \\ \\ Q(x) = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x + \dfrac{29}{27} \end{cases}$

Exemple 1.2.2
Soient $A(x) = 3x^4+2x^2$ et $B(x) = x^3+x^2$. Cherchons le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

$$\begin{array}{ccccc|l}
3x^4 & + & 2x^2 & & & x^3+x^2 \\ \cline{6-6}
3x^4 & + & 3x^3 & & & 3x-3 \\ \cline{1-3}
 & & -3x^3 & + & 2x^2 & \\
 & & -3x^3 & - & 3x^2 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 5x^2 &
\end{array}$$

d'où $A(x) = (3x-3)(x^3+x^2)+5x^2$. Autrement dit $\left\{\begin{array}{l} Q(x) = 3x-3 \\ R(x) = 5x^2 \end{array}\right.$

Théorème 1.2.2 (admis) *A et B sont deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$ tel que le terme constant b_0 de B soit non nul. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique couple, d'éléments de $\mathbb{K}[x]$, (Q_n, R_n) tels que*

$$A = BQ_n + x^{n+1}R_n \text{ et } deg(Q_n) \leqslant n$$

Dans ce cas on dit qu'on a effectué la division euclidienne de A par B suivant les puissances croissantes à l'ordre n. Q s'appelle le quotion et $x^{n+1}R_n$ le reste de cette division.

Algorithme de la division suivant les puissances croissantes

Exemple 1.2.3
Diviser $A = 2x+3x^2-x^3$ par $B = 1+2x-x^3$ dans $\mathbb{R}[x]$ suivant les puissances croissantes à l'ordre 4.
résultat : $Q_4 = 2x - x^2 + x^3$ *et* $R_4 = -1 + x$, $deg(Q) \leqslant 4$.

Définition 1.2.1 *Un polynôme non nul $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$ est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré est égale à 1.*

Exemples

1. Les polynômes $P(x) = x^3 + 2x$, $Q(x) = 1$ et $R(x) = x^7 - 2x^3 + 3$ sont des polynômes unitaires.
2. Les polynômes $p(x) = 2x^3 - 5x$, $R(x) = -5x^9 + x^2 - 1$ et $R(x) = 3$ ne sont pas des polynômes unitaires.

Définition 1.2.2 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. On dit que A est un diviseur de B ou que B est un multiple de A si il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[x]$ qui vérifie $B = QA$. On note dans ce cas A/B. (on lit A divise B.)*

Exemple 1.2.4

1. $x^2/x^3 - x^2$ car $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$.
2. $x - 1/x^2 - 1$ car $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$.

Remarque 1.2.1

1. *Si A/B alors le reste de la division euclidienne de B par A est nul.*
2. $\forall\, A \in \mathbb{K}[x]$; $A/0$.

Haj Dahmane Dhafer
I-S-E-T Jerba http://www.isetjb.rnu.tn

1.3 Polynômes irréductibles :

Définition 1.3.1 *Un polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ est dit irréductible si, et seulement si, il est non constant et ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[x]$ sont les λ (Polynômes cte) et les λP avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Proposition 1.3.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme non constant. P n'est pas irréductible si, et seulement si, $P = AB$ avec deg$(A)<$deg(P) et deg$(B)<$deg(P).*

Exemple 1.3.1

1. Les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles.
2. $x^2 - 2$ n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ car $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$.
3. $x^2 - 2$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.
4. $x^2 + x + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ mais il n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[x]$.

Proposition 1.3.2 *Tout polynôme non constant P de $\mathbb{K}[x]$ est produit de polynôme irréductibles.*

1.4 PPCM, PGCD de deux polynômes

Définition 1.4.1 (PPCM de deux polynômes) *Soient deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[x]$. Un polynôme C est dit plus petit commun multiple et noté par $PPCM(A, B)$ où $A \vee B$, si*

1. *C est un multiple de A et B.*
2. *Tout polynôme P qui est multiple de A et B est un multiple de C.*

Définition 1.4.2 (PGCD de deux polynômes) *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. Un polynôme $D \in \mathbb{K}[x]$ est dit plus grand diviseur de A et de B dans $\mathbb{K}[x]$ si*

1. *D divise A et D divise B.*
2. *Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ qui divise A et B alors P divise D.*

Le PGCD de A et B est noté par $PGCD(A, B)$ ou $A \wedge B$.

Exemple 1.4.1 Soient $A = x^2 - 1$ et $B = x^2 + 3x + 2$.
Ecrivons A et B sous la forme de produit de polynômes irréductible

$$A = (x - 1)(x + 1) \text{ et } B = (x + 1)(x + 2)$$

Soient $D(x) = (x + 1)$ et $C(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
$D = A \wedge B$ et $C = A \vee B$

Remarque 1.4.1

1. *Le PGCD et le PPCM de deux polynômes ne sont pas uniques. Ils sont uniques à une constante multiplicative près.*
2. *Si $deg(B) \leq deg(A)$ alors $A \wedge B$ est le dernier reste non nul dans l'algorithme de la division euclidienne de A par B.*

Exemple 1.4.2

1. *Dans l'exemple (1.4.1) on peut dire que $C_1(x) = 2 \times C(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x - 4$ est un PPCM de A et de B.*
2. *Dans l'exemple (1.4.1) on peut dire que $D_1(x) = 5 \times D(x) = 5x + 5$ est un PGCD de A et de B. On peut vérifier que $D(x)$ est le dernier reste non nul de l'algorithme de la division euclidienne de A par B.*

Définition 1.4.3 *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. On dit que A et B sont premiers entre eux si 1 est un $PGCD(A, B)$.*

Exemple 1.4.3 *x^2 et $x^2 + 1$ sont premiers entre eux.*

Théorème 1.4.1 *Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[x]$. Si D est un PGCD de A et B alors il existe*

$$(U, V) \in \mathbb{K}[x] \text{ tel que } AU + BV = D.$$

Remarque 1.4.2 *dans le théorème (1.4.1) l'unicité du couple (U, V) n'est pas assurée.*

Théorème 1.4.2 (Théorème de Gauss) *Si A divise BC dans $\mathbb{K}[x]$ et si A et B sont premier entre eux alors A divise C. (A/C)*

1.5 Racines d'un polynôme

Proposition 1.5.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. $a \in \mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si $(x - a)/P$.*

Exemple 1.5.1

1. Vérifier que 1 est une solution de l'équation

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 \tag{1.1}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (1.1)

Solution :

1. Il est claire que 1 est une solution de l'équation (1.1)
2. 1 est une solution de l'équation (1.1) alors
$$z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(az^2 + bz + c)$$
En développant le deuxième terme de l'équation précédente on en déduit que $a = 1$ et $c = 1$ d'ou
$$z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2 + bz + 1)$$
Or
$$(z-1)(z^2 + bz + 1) = z^3 + (b-1)z^2 + (1-b)z - 1$$
d'ou $b = 0$. Par conséquent
$$z^3 - z^2 + z - 1 = (z-1)(z^2 + 1)$$
$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$ donc
$$S_{\mathbb{C}} = \{1,\ i,\ -i\}.$$

Définition 1.5.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ et soit $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que $a \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre k de P si, et seulement si, $(x-a)^k$ divise P et $(x-a)^{k+1}$ ne divise pas P.*
On dit que a est une racine simple lorsque $k = 1$, double lorsque $k = 2$ et multiple lorsque $k \geqslant 2$.

Exemple 1.5.2
Soit $P = (x-1)^5(x+2)$.
✓ 1 est une racine d'ordre 5 de P.
✓ -2 est une racine simple de P.

Proposition 1.5.2 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme de degré n. p a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.*

Corollaire 1.5.1 *Soit $P \in \mathbb{K}[x]$. Si r_1, r_2,...,r_s sont les racines distinctes de P d'ordres respectif k_1, k_2,...,k_s alors $k_1 + k_2 + ... + k_s \leqslant n$.*

Théorème 1.5.1 (admis) *Tout polynôme de $\mathbb{C}[x]$, de degré n admet n racines (distinctes ou non)*

Proposition 1.5.3 *Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Si un nombre cmplexe a est une racine de P alors son conjugué, $\bar{a}$, est une racine de P.*[1]

Exemple 1.5.3
Soit le polynôme $P = z^4 - z^3 + z^2 + 2$

1. Vérifier que $1 + i$ est une racine de P.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

1. Autrement dit les racines d'un polynôme à coefficients réels sont réelles ou complexes deux à deux conjuguées.

Solution :

1.

$$\begin{aligned} P(1+i) &= (1+i)^4-(1+i)^3+(1+i)^2+2 \\ &= -4-2i+2+2i+2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. $1+i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$ et P est un polynôme à coefficients réels alors $\overline{1+i}=1-i$ est une solution de l'équation $P(z)=0$ d'ou

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-1-i)(z-1+i)(az^2+bz+c) & (1.2)\\ &= (z^2-2z+2)(az^2+bz+c). & (1.3) \end{aligned}$$

Il est claire que $a=1$ et $c=1$ d'ou

$$P(z)=(z^2-2z+2)(z^2+bz+1)$$

En développant le deuxième membre de l'équation (1.3) on aboutit à

$$P(z)=z^4+(b-2)z^3+(1-2b+2)z^2+(-2+2b)z+2$$

ce qui prouve que $b=1$ et que

$$P(z)=(z^2-2z+2)(z^2+z+1).$$

Résolvant l'équation

$$z^2+z+1=0 \qquad (1.4)$$

$\Delta=1-4=-3=(i\sqrt{3})^2$ d'ou les solutions de l'équation (1.4) sont

$$z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $P(z)=0$ est

$$S_{\mathbb{C}}=\left\{1+i,\,1-i,\,\frac{-1-i\sqrt{3}}{2},\,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

Corollaire 1.5.2 *Soit $P\in\mathbb{R}[x]$. Si un nombre cmplexe a est une racine de P d'ordre k alors son conjugué, $\bar{a}$, est une racine de P avec le même ordre k.*

Théorème 1.5.2 (Formule de Taylor) *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré n et soit $a\in\mathbb{K}$.*

$$P(x)=P(a)+(x-a)P'(a)+...+\frac{(x-a)^n}{n!}P^{(n)}(a)$$

Proposition 1.5.4 *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[x]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré n et soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *a est une racine d'ordre k de P.*

(ii) *a est une racine d'ordre $k-1$ de P'.*

(iii) *$P(a) = P'(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$.*

1.6 Algorithmes

1.6.1 Algorithme de Horner

En informatique, pour calculer la valeur en α du polynôme $A = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, on utilise habituellement l'algorithme de Horner consistant à calculer :

$$A(\alpha) = a_0 + (a_1 + (a_2 + ... + (a_{n-2} + (a_{n-1} + a_n\alpha)\alpha)\alpha...)\alpha)\alpha$$

qui nécessite bien moins d'opérations (n multiplications) que l'algorithme naïf calculant toutes les puissances de α (qui nécessite $n(n+1)/2$ multiplications).

Données La liste $(a_0, a_1, ..., a_n)$ des coefficients du polynôme
Le scalaire α

Variables Le compteur de boucle k
le calaire *Résultat*.

- $Rsultat \longleftarrow 0$
- pour k allant de n jusqu'à 0 par pas de -1 :
  $Rsultat \longleftarrow a_k + Rsultat * \alpha$

Résultat $Rsultat$.

1.6.2 Exponentiation rapide

L'algorithme de Horner permet de limiter le nombre de multiplication à n pour calculer la valeur d'une fonction polynômiale de degré n. Cependant, pour un monôme on peut faire encore mieux.
On effet, pour calculer α^n, on peut naïvement effctuer $n-1$ multiplications :

$$\alpha^n = \underbrace{\alpha \times \alpha \times ... \times \alpha}_{n\text{fois}}.$$

cepondant, l'exemple de

$$\alpha^{1024} = \left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left(\left((\alpha^2)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)^2$$

montre que l'on peut faire beaucoup mieux (ici 10 multiplications au lieu de 1023). L'algorithme d'exponentiation rapide part de la remarque :

- si $n = 0$, alors $\alpha^n = 1$.
- si $n = 2p$, alors $\alpha^n = (\alpha^p)^2$
- si $n = 2p + 1$ alors $\alpha^n = (\alpha^p)^2 \times \alpha$

On démontre que le nombre d'opérations effectuer est équivalent à $\log_2 n$.(pour plus de détailles voir ([6]) à la page 714).

1.7 Série d'éxercices

Exercice 1.1
Effectuer la division euclidienne, suivant les puissances décroissantes, de F par G dans $\mathbb{Q}[x]$.

1. $F = x^6 - 1$	$G = x^4 - 1$
2. $F = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$	$G = x^2 + 2x + 3$
3. $F = x^8 - 1$	$G = x^3 - 1$

Exercice 1.2
Effectuer la division euclidienne, suivant les puissances croissantes a l'ordre 3, de A par B.

1. $A = 1$	$B = x^2 + 2x + 1$
2. $A = x^2 + 1$	$B = x^4 + 5x + 2$

Exercice 1.3
Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division euclidienne de F par G :

(a) $F = x^{2n} + 3(x+1)^n + 2$ et $G = x(x+1)$

(b) $F = (\cos\theta + x\sin\theta)^n; \quad \theta \in \mathbb{R}$ et $G = 1 + x^2$.

Exercice 1.4
Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$, puis dans $\mathbb{C}[x]$, les polynômes suivants :
$P = x^3 - 1$, $Q = x^3 + 1$ et $R = x^4 + 1$

Exercice 1.5

1. Trouver un polynôme, $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré 2 sachant que : $P(2) = 1, \quad P'(2) = 0$ et $P''(2) = 3$
2. Trouver un polynôme, $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré 3 sachant que : $P(1) = 1, \quad P'(1) = 2$ et $P''(1) = 5$

Exercice 1.6

1. Soit le polynôme $P = x^5 + 6x^4 + 14x^3 + 16x^2 + 9x + 2$. Trouver l'ordre de multiplicité de -1 et factoriser P.
2. Montrer que 1 est une racine d'ordre 3 du polynôme

$$P = (1 - x^n)(1 + x) - 2nx^n(1 - x) - n^2x^n(1 - x)^2, \quad (n \geqslant 3).$$

Exercice 1.7

1. Soient les polynômes : $P = (3-x)(1-x)(1+x)(2+x)$, $Q = (2-x)(2+x)(1+x^2)$ et $R = (2-x)(1-x)(1+x)^2$. Déterminer le P.G.C.D(P, Q, R) et le P.P.C.M(P, Q, R).
2. On considère les polynômes $F = (x+4)(3x^2 + 5x - 8)(x^2 + x + 1)$ et $G = (x+4)(x^2 - 5x + 4)(x^2 + 3x - 4)$. Déterminer $F \wedge G$

Exercice 1.8

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer $D = A \wedge B$
   (a) $A = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 + 2$ et $B = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 2$.
   (b) $A = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$; $B = x^2 - x - 1$.
2. Dans chacun des cas précédents, trouver U et V tel que $UA+VB = D$.

Exercice 1.9

1. Vérifier que i est une solution de l'équation

$$z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0 \tag{1.5}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(3.6)

Exercice 1.10

1. Déterminer a et b pour que l'équation $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ admet -1 comme solution double.
2. Factoriser le polynôme ainsi obtenu dans $\mathbb{R}[x]$ puis dans $\mathbb{C}[x]$

Exercice 1.11
Effectuer la division euclidienne de F par G dans $\mathbb{Q}[x]$.
1. $F = x^6 - 1$ $G = x^4 - 1$
2. $F = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$ $G = x^2 + 2x + 3$

Exercice 1.12

1. Effectuer la division euclidienne, suivant les puissances croissantes a l'ordre 2, de A par B.
   1. $A = 1$ $B = x^2 + 2x + 1$
   2. $A = x^2 + 1$ $B = x^4 + 5x$
2. Déterminer les deux polynômes $(A, B) \in \mathbb{R}[x]^2$ tels que
   ✓ deg(A)=1 et deg(B)=2
   ✓ Le terme constant de B est égal à 1.
   ✓ Le quotient de la division, suivant les puissances croissantes à l'ordre 3, de A par B est $Q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

   Quelle est le degré du reste de la division. Déterminer alors ce reste.

Exercice 1.13
Sans effectuer la division, déterminer le reste de la division euclidienne de F par G :

(a) $F = x^{2n} + 3(x+1)^n + 2$ et $G = x(x+1)$

(b) $F = (\cos\theta + x\sin\theta)^n$; $\theta \in \mathbb{R}$ et $G = 1 + x^2$.

Exercice 1.14
Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$, de degré 5, tel que :
$(x-1)^3$ divise $P+1$ et $(x+1)^3$ divise $P-1$

Exercice 1.15

1. Déterminer a et b pour que l'équation $x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + 2 = 0$ admet -1 comme solution double.
2. Factoriser le polynôme ainsi obtenu dans $\mathbb{R}[x]$ puis dans $\mathbb{C}[x]$

Exercice 1.16

1. Vérifier que i est une solution de l'équation
$$z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 1 = 0 \qquad (1.6)$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation(3.6)

Exercice 1.17
Calculer la valeur du polynôme :
$$P = 2x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5x - 4$$
en $1+\sqrt{2}$ (on utilisera la division euclidienne de P par un polynôme à coefficients rationnels qui s'annule pour $1+\sqrt{2}$).

Exercice 1.18
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Traouver a et b pour que $P = ax^{2n} - bx^{4n-1} + 1$ soit divisible par $x^2 - 1$

Exercice 1.19
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver le reste de la division euclidienne du polynôme :
$$x^n + nx^{n-1} + x^2 + 1$$
par $(x+1)^2$.

Chapitre 2

Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions et règles de calcul

Définition 2.1.1 *Une fraction rationnelle est une classe de couples de polynômes (P, Q) avec $Q \neq 0$. Si (P, Q) est un représentant quelconque de F on convient d'écrire $F = \frac{P}{Q}$.*

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \Leftrightarrow PQ_1 = QP_1.$$

Notation L'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$ sera noté $\mathbb{K}(x)$

Remarque 2.1.1 $\mathbb{K}[x] \subset \mathbb{K}(x)$

Remarque 2.1.2 *Soit $F \in \mathbb{K}(x)$. Il existe deux polynômes premiers entre eux P et Q tel que $F = \frac{P}{Q}$.*
En effet
Soit $D = P \vee Q$. Il existe alors deux polynômes premiers entre eux P_1 et Q_1 tel que $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$.

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}.$$

Définition 2.1.2 *Soit $F \in \mathbb{K}(x)$ et soit $\frac{P}{Q}$ un représentant de F.*

1. *On dit que $\frac{P}{Q}$ est une forme irréductible de F si P et Q sont premiers entre eux.*
2. *Si de plus Q est unitaire alors cette représentation est unique. On dit dans ce cas que $\frac{P}{Q}$ est la forme réduite de F.*

Exemple 2.1.1 *Soit* $F = \dfrac{2x+2}{3x^2-3}$.

1. $\dfrac{2}{3x-3}$ *et* $\dfrac{10}{15x-15}$ *sont deux formes irréductibles de* F.
2. $\dfrac{\frac{2}{3}}{x-1}$ *est la forme réduite de* F.

2.1.2 Degré d'une fraction rationnelle

Thérème et définition 2.1.1 *Soit* F *une fraction rationnelle non nulle de* $\mathbb{K}(x)$. *Soit* (P, Q) *une représentant de* F $(F = \frac{P}{Q})$. *Le nombre*

$$deg(P) - deg(Q)$$

est indépendant du représentant choisi de F.
On appelle degré de F *le nombre* $deg(P) - deg(Q)$. *Le dgré de* F *sera noté* $deg(F)$.

Remarque 2.1.3 *Pour toute fraction rationnelle* F, $deg(F) \in \mathbb{Z}$.

Convention :
Si $F = 0$ (fraction nulle) alors $\deg(F) = -\infty$

Proposition 2.1.1 *Soient,* F_1 *et* F_2, *deux fractions rationnelles a coefficients dans* $\mathbb{K}$.

1. $deg(F_1 + F_2) \leqslant \max(deg(F_1), deg(F_2))$
2. $deg(F_1 F_2) = deg(F_1) + deg(F_2)$.

2.2 Racines et pôles d'une fraction rationnelle

Définition 2.2.1
Soit F *une fraction rationnelle de* ***forme irréductible*** $\frac{P}{Q}$.

1. *On appelle racine de* F *toute racine de* P.
2. *On appelle pôle de* F *toute racine de* Q.
3. *On dit que* $a \in \mathbb{K}$ *est une racine (resp pôle) d'ordre* k *de* F *si* a *est un zéro d'ordre* k *de* P *(resp de* Q*).*

Remarque 2.2.1 *Il est indisponsable dans la définition (2.2.2) de considérer une forme irréductible de* F

Exemple 2.2.1
Soit $F = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.

✓ $\dfrac{x-2}{x+1}$ est une forme irréductible de F

✓ 2 est une racine de F.

✓ -1 est un pôle de F

✓ 1 n'est pas une racine ni un pôle de F.

Définition 2.2.2 *Soit F une fraction rationnelle de forme irréductible $\frac{P}{Q}$. On désigne par A l'ensemble des pôles de F.*

* *pour $\alpha \in \mathbb{K} \setminus A$, on définit $F(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.*

* *La fonction définie sur $\mathbb{K} \setminus A$ par $x \longmapsto F(x)$ est appelée **fonction rationnelle** associée à la fonction rationnelle F.*

2.3 Décomposition en éléments simples

Nous abordons maintenant le paragraphe fondamental de ce chapitre. Le but est de transformer une fraction rationnelle quelconque en une somme de fractions simples (nous préciserons ce que nous entendrons par "simple").

2.3.1 Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition 2.3.1 *Toute fraction rationnelle F s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme, appelé partie entière de F, et d'une fraction rationnelle de degré strictement négatif.*

Preuve :
Unicité :
Supposons qu'il existe deux polynômes E_1 et E_2 et deux fractions rationnelles de degrés strictement négatifs F_1 et F_2 tel que

$$F = E_1 + F_1 = E_2 + F_2$$

d'ou

$$E_1 - E_2 = F_2 - F_1$$

par conséquent

$$\deg(E_1 - E_2) = \deg(F_2 - F_1) < \max(\deg(F_1), \deg(F_2)) < 0.$$

$E_1 - E_2$ est donc un polynôme de degré strictement négatif. Il en résulte que $E_1 - E_2 = 0$. On en déduit que $E_1 = E_2$ et $F_1 = F_2$.

Existance :
Soit $F = \frac{P}{Q}$. On désigne par E et R respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par Q. On a alors $P = QE + R$ et $\deg(R) < \deg(Q)$ d'ou

$$F = E + \frac{R}{Q} \text{ et } \deg\left(\frac{R}{Q}\right) < 0.$$

Remarque 2.3.1 *D'aprés la démonstration précédente la partie entière de* $\frac{P}{Q}$ *est le quotient de la division euclidienne de* $\frac{P}{Q}$.

Exemple 2.3.1

1. Si F est une fraction rationnelle de degré strictement négatif alors sa partie entière est nulle.
2. Si le degré de F est nul alors la patie entière est un polynôme constant.
$$\frac{2x^2+3x}{x^2-x} = 2 + \frac{5x}{x^2-x}.$$
3. La partie entière de $\dfrac{x^5}{(x^2+x+1)^2}$ est $x-2$.
4. Si F est une fraction paire alors sa partie entière est paire.
En effet
On désigne par E la partie entière de F. Il existe une fraction rationnelle de degré strictement négatif tel que $F = E + F_1$.
$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & E(x) + F_1(x) \\ \| & & \\ F(-x) & = & E(-x) + F_1(-x) \end{array}$$
l'unicité de la décomposition de $F \Rightarrow E(-x) = E(x)$
5. Si F est une fraction impaire alors sa partie entière est impaire.
6. Soit $F = \dfrac{x^5+x^2+x}{(x^2+1)^2}$. La partie entière de F est de la forme $x+\alpha$.
$$F(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

2.3.2 Partie polaire d'une fraction rationnelle

Proposition 2.3.2 *Si F est une fraction rationnelle admettant a pour pôle d'ordre n, il existe un unique n-uplet de scalaire $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ et une unique fraction rationnelle F_a n'admettant pas a pour pôle tel que*
$$F = \sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(x-a)^p} + F_a.$$
La quantité $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{\lambda_p}{(x-a)^p}$ *s'appelle la* ***partie polaire de*** F *relative au pôle* a.

Exemple 2.3.2

1. $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\alpha}{x-1} + F_1$ (1 n'est pas un pôle de F_1)
2. $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{\alpha}{x+1} + F_{-1}$ (-1 n'est pas un pôle de F_{-1})
3. $\dfrac{3x-1}{(x-1)^2(x+2)} = \dfrac{\alpha}{x-1} + \dfrac{\beta}{(x-1)^2} + F_1$ (1 n'est pas un pôle de F_1)

Remarque 2.3.2 *Soit une fraction rationnelle F. Supposons que les pôles de F sont a_1, a_2,...,a_n d'ordres respectifs r_1, r_2,...,r_n et que F_1 est la partie polaire relative à a_1. Soit $F_0 = F - F_1$. a_2,...a_n sont les pôles de F_{a_1} d'ordres respectifs r_2,...,r_n.*

Méthodes pratiques

Soit F une fraction rationnelle de pôle a.

*** Si a est un pôle d'ordre 1 de F**

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-a)Q_1} = \frac{\lambda_1}{x-a} + F_a. \tag{2.1}$$

En multipliant l'équation (3.5) par $(x-a)$ on obtient

$$(x-a)F = \lambda_1 + (x-a)F_a = \frac{P}{Q_1}. \tag{2.2}$$

Pour $x = a$

$$\lambda_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)}. \tag{2.3}$$

Or $Q = (x-a)Q_1$ d'ou $Q' = Q_1 + (x-a)Q_1'$. Par conséquent

$$Q'(a) = Q_1(a) \tag{2.4}$$

Il en résulte, a partir des équations (2.3) et (2.4),

$$\lambda_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

*** Si a est un pôle d'ordre 2 de F**

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(x-a)^2Q_1} = \frac{\lambda_2}{(x-a)^2} + \frac{\lambda_1}{x-a} + F_a. \tag{2.5}$$

En multipliant l'équation (2.5) par $(x-a)^2$ on obtient

$$(x-a)F = \lambda_0 + \lambda_1(x-a) + (x-a)^2F_a = \frac{P(x-a)^2}{Q} = \frac{P}{Q_2}. \tag{2.6}$$

Pour $x = a$

$$\lambda_2 = \frac{P(a)}{Q_2(a)}. \tag{2.7}$$

Pour déterminer λ_1 on peut calculer la partie polaire de $F - \dfrac{\lambda_2}{x-a}$.

Remarque 2.3.3 *On peut utiliser la même démarche pour déterminer la partie polaire relative à un pôle d'ordre $n > 2$.*

Exemple 2.3.3

1. Soit $F = \dfrac{x^5+1}{x(x-1)^2}$.
   (a) Partie polaire relative à 0.
   Il existe une fraction rationnelle F_0 tels que
   $$F = \frac{\lambda}{x} + F_0 \tag{2.8}$$
   et 0 n'est pas un pôle de F_0. En multipliant l'équation (2.8) par x on obtient
   $$\frac{x^5+1}{(x-1)^2} = \lambda + xF_0, \tag{2.9}$$
   pour $x = 0$ on aura $\lambda = 1$. Par conséquent la partie polaire relative à 0 est $\frac{1}{x}$.
   (b) Partie polaire relative à 1
   Il existe une fraction rationnlle F_1 et deux réels α et β tels que
   $$F = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} + F_1 \tag{2.10}$$
   En multipliant l'équation (2.10) par $(x-1)^2$ on obtient
   $$\frac{x^5+1}{x} = \alpha(x-1) + \beta + (x-1)^2 F_1, \tag{2.11}$$
   pour $x = 1$ on aura $\beta = 2$.
   Déterminons α
   Soit $G = F - \dfrac{\beta}{(x-1)^2}$. 1 est un pôle simple de G, de plus
   $$G = \frac{x^4+x^3+x^2+x-1}{x(x-1)} = \frac{\alpha}{x-1} + F_1 \tag{2.12}$$
   En multipliant l'équation (2.12) par $(x-1)$ on obtient
   $$\frac{x^4+x^3+x^2+x-1}{x} = \alpha + (x-1)F_1, \tag{2.13}$$
   pour $x = 1$ on aura $\alpha = 3$. La partie polaire relative à 1 est donc
   $$\frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$$

2. Soit $F = \dfrac{1}{x^5 - 1} = \dfrac{P}{Q}$.
   Si ω est un pôle de F alors ω est une racine $5^{\text{ième}}$ de 1. La partie polaire relative à ω est $\dfrac{\lambda}{x - \omega}$ avec
   $$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{1}{5\omega^4} = \frac{\omega}{5}.$$

2.3.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le dénominateur d'une fraction rationnelle est donc sindé (Peut être écrit en produit de polynômes de degrés 1).

Théorème 2.3.1 *Etant donnée une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(x)$ dont les pôles sont a_1, a_2,...a_n distincts deux à deux et d'ordre de mulyiplicité respectifs r_1, r_2,...,r_n. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{C}[x]$ et une unique famille de scalairs $(\lambda_{ij})_{1 \leqslant i \leqslant n;\, 1 \leqslant j \leqslant r_i}$ tels que*

$$\begin{aligned} F &= E + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r_i} \frac{\lambda_{ij}}{(x - a_i)^j} \right) \\ &= E + \left(\frac{\lambda_{11}}{x - a_1} + ... + \frac{\lambda_{1r_1}}{(x - a_1)^{r_1}} \right) + ... + \left(\frac{\lambda_{n1}}{x - a_n} + ... + \frac{\lambda_{nr_n}}{(x - a_n)^{r_n}} \right) \end{aligned}$$

Autrement dit, toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(x)$ est la somme de sa partie entière et des parties polaires associés à chacun de ses pôles.
Cette décomposition s'appelle décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$ de la fraction F.

2.3.4 Méthodes pratiques

Si la fraction est à coefficients réels

Si $F \in \mathbb{R}(x)$ et si a est un pôle non réel de F d'ordre de multiplicité k alors $\bar{a}$ est un pôle de F de même ordre k et les coefficients des parties polaires associées à a et $\bar{a}$ sont conjugués deux à deux.

Exemple 2.3.4
Soit $F = \dfrac{1}{x^2 + 1}$. Il existe deux nombres complexes α et β tel que

$$F = \frac{\alpha}{x - i} + \frac{\beta}{x + i} \tag{2.14}$$

d'ou

$$F = \bar{F} = \frac{\bar{\alpha}}{x + i} + \frac{\bar{\beta}}{x - i} \tag{2.15}$$

(2.14) et (2.15)implique que $\alpha = \bar{\beta}$.
En multipliant l'équation (2.14) par $(x-i)$ et en considérant $x = i$ on aura $\alpha = -\frac{i}{2}$ et $\beta = \frac{i}{2}$. Par conséquent

$$F = \frac{-\frac{i}{2}}{x-i} + \frac{\frac{i}{2}}{x+i}$$

Si la fraction est paire ou impaire

Si F est une fraction paire ou impaire et que a est un pôle de F d'ordre n alors $-a$ est aussi un pôle de F d'ordre n. l'expression $F(-x) = \pm F(x)$ donne des relations entres les coefficients des parties polaires associées à a et $-a$.

Exemple 2.3.5
Soit $F = \dfrac{4}{(x^2-1)^2}$. Il existe quatres nombres complexes a, b, c et d tel que

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{(x-1)^2} + \dfrac{d}{(x+1)^2} \\ \| & & \\ F(-x) & = & \dfrac{-a}{x+1} + \dfrac{-b}{x-1} + \dfrac{c}{(x+1)^2} + \dfrac{d}{(x-1)^2} \end{array}$$

l'unicité de la décomposition implique que $\left\{ \begin{array}{r} a = -b \\ c = d \end{array} \right.$.
On a immidiatement $c = d = 1$. Pour déterminer a il suffit de considérer $x = 0$. On obtient

$$4 = -a + b + c + d,$$

d'ou $a = -1$ et $b = 1$. Par conséquent

$$F = -\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Si la fraction est de degré strictement négatif

Si f est la fonction associée à la fraction F alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} xf(x)$ nous permet de trouver les coefficients des termes $\dfrac{1}{x-a_i}$

Exemple 2.3.6
Soit $F = \dfrac{4x^3}{(x^2-1)^2}$. Il existe quatre réels a, b, c et d tel que

$$F = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{(x+1)^2}, \tag{2.16}$$

d'ou

$$F(-x) = \frac{-a}{x+1} + \frac{-b}{x-1} + \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x-1)^2}.$$

F est impaire alors

$$a = b \text{ et } c = -d.$$

d'ou

$$F = \frac{a}{x-1} + \frac{a}{x+1} + \frac{c}{(x-1)^2} - \frac{c}{(x+1)^2}.$$

On a immidiatement $c = 1$ et $d = -1$. En multipliant l'équation (2.16) par x on obtient

$$\frac{4x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{ax}{x-1} + \frac{ax}{x+1} + \frac{cx}{(x-1)^2} - \frac{cx}{(x+1)^2}$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $a = 4$.

$$F = \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

S'il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer

Lorsqu'il ne reste plus qu'un ou deux coefficients à déterminer, on peut substituer x une ou deux valeurs simples.

Exemple 2.3.7
Soit la fraction

$$F = \frac{x^4+1}{(x+1)^2(x^2+1)} = 1 + \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-i} + \frac{\bar{c}}{x+i}.$$

On a immidiatement $c = -\frac{1}{2}$ et $a = 1$. En substituant 0 à x, on obtient de plus :

$$1 = 1 + a + b - \frac{c}{i} + \frac{\bar{c}}{i} = 2 + b$$

d'ou $b = -1$ et

$$F = 1 + \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x-i)} - \frac{1}{2(x+i)}$$

2.3.5 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ il existe deux types de polynômes irréductibles

(i) Les polynômes de premier degré.

(ii) Les polynômes de deuxièmme degré à discriminant strictement négatif.

On a alors le théorème suivant

Théorème 2.3.2 *Soit $F \in \mathbb{R}(x)$. Soit $\frac{P}{Q}$ une forme irréductible de F. Soit*

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}...(x-a_m)^{\alpha_m}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}...(x^2+p_nx+q_n)^{\beta_n}$$

l'écriture de Q en produit de polynômes irréductibles. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[x]$ et des familles uniques de réels $(A_{ij})_{1\leqslant i\leqslant m;1\leqslant j\leqslant \alpha_j}$, $(B_{kl})_{1\leqslant k\leqslant n;1\leqslant l\leqslant \beta_k}$ et $(C_{kl})_{1\leqslant k\leqslant n;1\leqslant l\leqslant \beta_k}$ tel que

$$F(x) = E(x) + \underbrace{\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j}\right)}_{\text{éléments simples de première espèce}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{\beta_k}\frac{B_{kl}x+C_{kl}}{(x^2+p_kx+q_k)^l}\right)}_{\text{éléments simples de deuxième espèce}}$$

Exemple 2.3.8
Soit $F = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$. Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$

✓ 1$^{\text{ière}}$ méthode : En utilisant le théorème (2.3.2)
D'aprés le rhéorème (2.3.2) il existe trois réels a, b et c tel que

$$F = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1} \tag{2.17}$$

1. En multipliant l'équation (2.18) par $(x+1)$ et en considérant $x=-1$ on obtient $a = \frac{1}{2}$.
2. En substituant 0 à x, dans l'équation (2.18), on obtient $c = \frac{1}{2}$
3. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} xF = 0$ d'ou $a+b=0$. Par conséquent $b = -\frac{1}{2}$.

Il en résulte finalement

$$F = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)}.$$

✓ 2$^{\text{ième}}$ méthode : En utilisant la décomposition dans $\mathbb{C}(x)$ (le théorème (2.3.1))
D'aprés le rhéorème (2.3.1) il existe trois nombres complexes α, β et γ tel que

$$F = \frac{\alpha}{x+1} + \frac{\beta}{x-i} + \frac{\gamma}{x+i} \tag{2.18}$$

Les calculs prouvent que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{4}(1+i)$ et $\gamma = \bar{\beta} = -\frac{1}{4}(1-i)$.
Par conséquent

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1+i}{4(x-i)} - \frac{1-i}{4(x+i)} \\ &= \frac{1}{2(x+1)} + \frac{-x+1}{2(x^2+1)}. \end{aligned}$$

2.4 Série d'exercices

Exercice 2.1
Mettre sous forme irréductible les éléments de $\mathbb{R}(x)$ suivants :

(a) $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3-1}$ (c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$

(b) $\dfrac{x^4+x^2}{x^4-1}$ (d) $\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-5x^2+4}$

Exercice 2.2
Mettre sous forme irréductible les éléments de $\mathbb{C}(x)$ suivants :

(a) $\dfrac{x^2+1}{x^2-2ix-1}$ (c) $\dfrac{x^2+i}{x^4+1}$

(b) $\dfrac{x^2+(1-i)x-i}{x^2-(1+i)x+i}$ (d) $\dfrac{x^2-2\cos\theta x+1}{e^{i\theta}x-1}$

Exercice 2.3
Trouver la partie entière des fractions rationnelles suivantes :

(a) $\dfrac{x}{x-1}$ (b) $\dfrac{x}{x^4+1}$ (c) $\dfrac{3x^3-2}{x^2-1}$

Exercice 2.4
Montrer que si F_1 et F_2 sont deux fractions rationnelles, la partie entière de F_1+F_2 est la somme des parties entières.

Exercice 2.5
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ les fractions suivantes :

(a) $F=\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$ (e) $F=\dfrac{3x+1}{x(x^2+1)}$

(b) $F=\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ (f) $F=\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$

(c) $F=\dfrac{3x+1}{x^2(x+1)^2}$ (g) $F=\dfrac{6x^3+1}{x(x^2+1)}$

(d) $F=\dfrac{x^3-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Exercice 2.6
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$ les fractions suivantes :

(a) $F = \dfrac{10x^3}{(x^2+1)(x^2-4)}$

(b) $F = \dfrac{x^4+1}{x^4+x^2+1}$

(c) $\dfrac{x-1}{x^3-1}$

(d) $F = \dfrac{(x^2+4)^2}{(x^2+1)(x^2-2)^2}$

Exercice 2.7

1. **(a)** Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{x(x+1)}$

   (b) Déduire $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

2. Déterminer $S_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice 2.8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[x]$, les fractions suivantes :

(a) $\dfrac{1}{x^n-1}$

(b) $\dfrac{x^{n-1}}{x^n-1}$

Exercice 2.9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, $b \in \mathbb{C}$. Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$

(c) $\arctan x$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x\text{ch}a + 1}$

Exercice 2.10

On considère la fraction $F(x) = \dfrac{1}{(x^3-1)^3}$

1. Vérifier que le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $\dfrac{1}{(1+x+x^2)^3}$ est :

$$\frac{1}{(1+x+x^2)^3} = \frac{1}{27} - \frac{1}{9}(x-1) + \frac{5}{27}(x-1)^2 + \circ((x-1)^3)$$

2. Déduire que la partie polaire, de F, relative au pôle 1 est :

$$\frac{1}{27}\frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{9}\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{5}{27}\frac{1}{(x-1)}$$

3. En remarquent que $F(jx) = F(j^2x) = F(x)$, déterminer la décomposition en éléments simples de F.

Exercice 2.11
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

(b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1)}$

(c) $\dfrac{1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^4-1}$

Exercice 2.12
Décomposer en éléments simples la fraction

$$F = \frac{x-2}{x^4(x-1)}$$

(indication : on peut effectuer la division euclidienne suivant les puissances croissantes de $x-2$ par $x-1$.)

Problème 1
Soit le polynôme $P(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$

1. Calculer $P(2)$, $P'(2)$ et $P''(2)$. Que peut-on conclure ?
2. Décomposer le polynôme P en produit de polynômes
   (a) à coefficients réels.
   (b) à coefficients complexes.
3. Décomposer la fraction rationnelle
$$R(x) = \frac{11-2x}{x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$$
en éléments simples à coefficients réels.

Problème 2

1. Soit le polynôme $P(x) = x^4 + x^2 + 1$. Chercher un polynôme Q dans $\mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = (x^2+x+1)Q(x)$.
2. Décomposer dans $\mathbb{R}(x)$ la fraction $A(x) = \dfrac{2x^2}{x^4+x^2+1}$
3. Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 du polynôme $N(x) = x^6 + 1$ par $P(x)$.
4. Décomposer, en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$, la fraction rationnelle suivante :
$$B(x) = \frac{x^6+1}{x^4(x^4+x^2+1)};$$

5. Effectuer la division suivant les puissances décroissantes du polynôme

$$M(x) = 1 + x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + x^8 + x^9 \text{ par } x^4(x^4 + x^2 + 1).$$

En déduire une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ de la fraction

$$C(x) = \frac{M(x)}{x^4(x^4 + x^2 + 1)}.$$