1. Méthodes à un pas explicites

Dans toute cette fiche on propose des méthodes numériques pour résoudre l'équation différentielle

(1) $$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t,y(t)) \\ y(t_0) & = & a \end{array}\right.$$

On cherche $y(t)$ solution de (1) dans $\mathscr{C}^1([t_0,t_0+T],\mathbb{R}^m)$. On se place sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz pour s'assurer de l'existence et de l'unicité d'une telle solution, c'est-à-dire, f continue de $[t_0,t_0+T]\times\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et globalement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec constante de Lipschitz notée L.

Soit $N\in\mathbb{N}$, on définit la subdivision de l'intervalle $[t_0,t_0+T]$,

$$\forall n\in\{0,\dots,N\},\quad t_n=t_0+nh\quad \text{avec}\quad h=\frac{T}{N}.$$

On appelle méthode de résolution approchée à un pas (constant), la construction pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ d'une suite finie $(y_n)_{0\le n\le N}$ telle que

(2) $$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}=y_n+h\Phi(t_n,y_n,h) \\ y_0 \text{ donné} \end{array}\right.$$

Pour tout $0\le n\le N$, y_n est une approximation de $y(t_n)$, où y est la solution exacte du problème (1) et on dit que la méthode (2) converge si

$$\lim_{N\to+\infty}\lim_{y_0\to y(t_0)}\max_{0\le n\le N}|y(t_n)-y_n|=0.$$

2. Méthodes à un pas explicites : Euler, point-milieu

Implémentation. La méthode d'Euler est la méthode la plus simple que l'on puisse envisager, c'est le cas où $\Phi(t,y,h)=f(t,y)$. La méthode s'écrit donc

(3) $$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n) \\ y_0 \text{ donné} \end{array}\right.$$

Pour la méthode du point milieu, $\Phi(t,y,h)=f(t+\frac{h}{2},y+\frac{h}{2}f(t,y))$. La méthode s'écrit donc

(4) $$\left\{\begin{array}{l} y_{n+1}=y_n+hf(t_n+\frac{h}{2},y_n+\frac{h}{2}f(t_n,y_n)) \\ y_0 \text{ donné} \end{array}\right.$$

Écrire deux procédures `euler(f,t0,y0,T,N)`, `milieu(f,t0,y0,T,N)` qui tracent le graphe de la fonction affine par morceaux u_N, défini par $u_N(t_n)=y_n$ pour les méthode d'Euler et du point-milieu respectivement.
Tests. Tester vos procédures sur les exemples suivants

(5) $$\left\{\begin{array}{l} y'(t)=3y(t)-1 \\ y(0)=1/3 \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l} y'(t)=-150y(t)+30 \\ y(0)=1/5 \end{array}\right.\qquad \left\{\begin{array}{l} y'(t)=y(t)(\cos(t)-2t\tan(t^2)) \\ y(0)=1 \end{array}\right.$$

dont les solution exactes sont respectivement $y_1(t)=1/3$, $y_2(t)=1/5$, $y_3(t)=\exp(\sin(t))\cos(t^2)$. Pour vérifier que les méthodes convergent vous superposerez sur un même graphique la solution exacte et la solution approchée.

Comportement de l'erreur. On va mettre en évidence numériquement l'ordre de convergence des deux méthodes introduites ci-dessus. Le but est de tracer le graphe de $\max_{0\le n\le N}|y(t_n)-y_n|$ en fonction de N pour les deux méthodes. Pour cela :

- construire les procédures `erreureuler(f,t0,y0,T,N,y)` et `erreurmilieu(f,t0,y0,T,N,y)`, qui pour N donné renvoie $\max_{0\le n\le N}|y(t_n)-y_n|$ pour les méthodes d'Euler et du point-milieu respectivement.
- construire les procédures `grapheeuler(f,t0,y0,T,y)` et `graphemilieu(f,t0,y0,T,y)` qui trace $\max_{0\le n\le N}|y(t_n)-y_n|$ et les courbes $1/N$, $1/N^2$, $1/N^3$ en fonction de N, avec une progression logarithmique en abscisses et en ordonnées. Vous pouvez prendre par exemple N qui varie dans `[1:100:2000]`.

Tests. Tester cette procédure sur le troisième exemple ci-dessus. Qu'observe t-on ? Quel est l'ordre de convergence des méthodes d'Euler et du point-milieu ?

3. Problèmes raides. Méthodes implicites

On va mettre en évidence deux phénomènes numériques de propagation d'erreur sur les deux premiers exemples de (5). On veut observer l'influence d'une petite pertubrbation de la condition initiale sur la solution de l'équation.

Problème numériquement mal posé. Dans le premier exemple, tester la méthode d'Euler avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$, ($\varepsilon = 10^{-8}$ par exemple) et $T = 10$ avec $N = 20, 30, 50, 100, 300$. Qu'observez-vous ?
La donnée initiale $\tilde{y}(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$ fournit $\tilde{y}(t) = \frac{1}{3} + \varepsilon e^{3t}$. On a alors

$$\tilde{y}(10) - y(10) = \varepsilon e^{30} \approx 10^{13}\varepsilon.$$

Ainsi le problème est ici numériquement mal posé, c'est-à-dire quelle que soit la méthode numérique employée et sa précision une petite perturbation de la condition initiale pourra entrainer une grosse perturbation de la solution. Ceci est lié au fait que la solution de cette équation différentielle est asymptotiquement instable (cf. cours sur les équations différentielles).

Problème raide. Dans le deuxième exemple, tester la méthode d'Euler avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$, ($\varepsilon = 10^{-8}$ par exemple) et $T = 2$ avec $N = 20, 30, 50, 100, 140, 150, 300$. Qu'observez-vous ?
La donnée initiale $\tilde{y}(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ fournit $\tilde{y}(t) = \frac{1}{5} + \varepsilon e^{-150t}$. On a alors

$$\tilde{y}(t) - y(t) = \varepsilon e^{-150t}.$$

Et comme $e^{-150t} \leq 1$ sur $[0,2]$, le problème est numériquement bien posé, c'est-à-dire que l'erreur sur la solution sera au pire de l'ordre de l'erreur sur la condition initiale. Cependant, après calcul (que je vous encourage vivement à faire !!) on constate que la méthode d'Euler vérifie :

$$y_n - \frac{1}{5} = (1 - 150h)^n \left(y_0 - \frac{1}{5} \right).$$

Donc pour que $|y_n|$ ne diverge pas vers $+\infty$, il est nécessaire de prendre $|1 - 150h| \leq 1$ i.e. $h \leq \frac{1}{75}$. Ce résultat théorique correspond-il à ce que vous avez observé ci-dessus ? Dans cet exemple, pour obtenir une bonne convergence il est nécessaire de prendre un pas h assez petit, c'est-à-dire un coût en calcul plus élevé. On parle de problème raide ou mal conditionné.

Méthode implicite d'Euler. Cette méthode s'écrit :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_{n+1}) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases} \tag{6}$$

Cette méthode est dite implicite car à chaque itération, pour trouver y_{n+1} à partir de y_n il est nécessaire de résoudre une équation. Cette équation peut-être *a priori* linéaire ou non selon la fonction f. Pour simplifier, on ne va mettre en oeuvre cette méthode que sur le deuxième exemple. Écrire une procédures `eulerimp(t0,y0,T,N)` qui trace le graphe de la fonction affine par morceaux u_N, défini par $u_N(t_n) = y_n$ pour la méthode d'Euler-implicite sur le deuxième exemple.
Tests. Tester la procédure avec $y(0) = \frac{1}{5} + 10^{-8}$ et $N = 10, 30, 50$. Qu'observez-vous ?

4. Runge-Kutta d'ordre 4

Rappelons la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 pour l'équation différentielle ordinaire (1), avec les mêmes notations,

$$
\begin{aligned}
p_1 &= f(t_n, y_n) \\
p_2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} p_1) \\
p_3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} p_2) \\
p_4 &= f(t_{n+1}, y_n + h p_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4)
\end{aligned}
$$

Comme pour la méthode du point au milieu, construire `rungekutta(f,t0,y0,T,N)` et étudier l'erreur sur les exemples donnés avec les procédures `erreurrunge(f,t0,y0,T,N,y)` et `grapherunge(f,t0,y0,T,y)`. Vérifier que l'ordre de convergence est bien celui attendu.

5. Système proie–prédateur de Lotka–Volterra

Considérons deux espèces animales en interaction, les prédateurs et les proies de densité de population respective $p(t)$ et $q(t)$ modélisées par le système différentielle suivant

$$
\begin{cases}
p'(t) = ap(t)q(t) - bp(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ \\
q'(t) = -cp(t)q(t) + dq(t), \\
p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0
\end{cases}
\tag{7}
$$

Les constantes a et b sont strictement positives et correspondent respectivement aux taux de croissance des prédateurs par capture proies et à leur taux de mortalité propre. Les constantes (strictement positives) c et d représentent le taux de disparition des proies par capture et leur taux de prolifération.

On suppose que $p_0, q_0 > 0$. On donne en annexe quelques éléments qui permettent d'obtenir les propriétés suivantes des solutions $(p(t), q(t))$:

– le système admet une solution unique définie sur $\mathbb{R}^+$.

– $\forall t > 0$ on a $p(t) > 0$, $q(t) > 0$ (ce qui est «normal»pour une densité de population).

– $\exists C > 0$ tel que $p(t) < C$ et $q(t) < C$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

– le caractère périodique du système.

– les valeurs moyennes de $p(t)$ et $q(t)$ (i.e. $\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t p(s)ds}{t}$ et $\lim_{t\to+\infty} \frac{\int_0^t q(s)ds}{t}$) sont indépendantes des données initiales et valent respectivement d/c et b/a.

Avec Python. On prend $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 3$. Avec les méthodes d'Euler explicite et Runge-Kutta d'ordre 4 faire quelques expériences numériques. On tracera le graphique $(p(t), q(t))$, et la superposition de $(t, p(t))$ et $(t, q(t))$. Selon le schéma et le pas choisi la simulation correspond-elle à la théorie (périodicité) ?
Instabilité : – tester avec des valeurs initiales faibles $(p_0, q_0) = (0.01, 0.01)$
– tester avec $b = 1$, $a = 0.01$, $d = 0.25$, $c = 0.01$, $p_0 = 30 \pm 1$ et $q_0 = 80 \pm 1$.

Avec Python (bis).
- Schéma d'Euler implicite (en utilisant `solve`)
- observation numérique de la propriété des valeurs moyennes

6. Van der Pol

L'équation de Van der Pol décrit un oscillateur entretenu (oscillation-relaxation) et modélise par exemple les battements du coeur. Voici l'équation, ε étant un paramètre > 0, y est solution de l'EDO du second ordre

$$
\frac{y''(t)}{\varepsilon} + (y(t)^2 - 1)y'(t) + y(t) = 0
\tag{8}
$$

En s'inspirant de l'étude des systèmes de proie-prédateur et avec les fonctions intégrées de Scipy :

- Transformer cette équation du second ordre en un système différentiel du premier ordre
- Pour différentes valeurs de ε et pour différentes données initiales constater numériquement que la solution converge vers une solution périodique
- Une seule solution périodique existe
- Battement du coeur pour ε grand