Exercice 1. Déterminer le polynôme d'interpolation passant par les points

$$(1,3),(2,2),(4,1),(5,4),(6,3)$$

en exécutant à la main l'algorithme des différences divisées. Calculer sa valeur en 3. Programmer l'algorithme des différences divisées et d'évaluation rapide en un point.

Exercice 2. On cherche à approcher la fonction $f(x) = \sin(\pi x)$ sur $[-1,1]$ par un polynôme.

1. Déterminer la valeur exacte de $f(k/6)$ pour $k \in [-6,6]$ puis une valeur approchée.
2. Déterminer le polynôme de Lagrange correspondant à ces 13 points, puis une majoration de l'erreur commise, en fonction de x, puis uniforme. Représenter graphiquement l'erreur.
3. Faire le même calcul avec 7 points de Tchebyshev.

Exercice 3. On cherche à approcher la fonction `erf` par un polynôme sur des intervalles de $\mathbb{R}^+$. Près de 0, on peut utiliser le développement de Taylor, près de l'infini son développement asymptotique. Mais pour x entre disons 1 et 10, aucun des deux développements ne converge assez vite. Proposez une méthode d'approximation basée sur une interpolation qui donne une précision raisonnable (disons `1e-12`).

Exercice 4. Illustrer le phénomène de Runge avec la fonction $1/(1+25x^2)$ interpolée sur $[-1,1]$ par de plus en plus de points équidistants. Véifiez qu'il ne se produit pas en prenant des points de Tchebychef.

Exercice 5. Déterminer le polynôme d'interpolation aux points $(a, f(a)), (\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})), (b, f(b))$. Calculer et factoriser son intégrale entre a et b (formule de Simpson).

Exercice 6.

1. Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice de taille n en utilisant l'interpolation du déterminant en $0, ..., n$ (écrire un programme et l'exécuter pour une matrice aléatoire de taille 100 par exemple).
2. Combien d'opérations (en fonction de n) faut-il effectuer pour déterminer ce polynôme (on suppose le calcul du déterminant en une valeur de λ fait numériquement) ?
3. Tester ensuite la factorisation du polynôme caractéristique pour une matrice de taille pas trop petite (aléatoire ou matrice companion d'un polynôme) et comparer avec `egvl`. Est-ce une bonne idée de calculer les racines du polynôme caractéristique pour diagonaliser une matrice ?

Exercice 7. On considère sur les fonctions continues de $[-1,1] \to \mathbb{R}$ le produit scalaire :

$$f.g = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

Construire une base orthonormale de 5 polynômes de degré 0, 1, 2, 3 et 4. Soit P le projeté de la fonction $f(x) = \ln(2+x)$ sur cette base, représenter P et f sur le même graphe. Quelle est la distance de f à l'espace des polynômes de degré ≤ 4 ?