Cours MAP434, «Contrôle de modèles dynamiques»
Séance 1, 8 Avril 2015
EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

Rappel de cours : équations différentielles, théorème de Cauchy-Lipschitz (cas globalement Lipschitzien), approximation.

I - Schémas explicites et implicites pour les équations différentielles ordinaires

On veut discrétiser l'équation différentielle :

$$u'(t) = Au(t) \ ,$$

où A est une matrice (réelle ou complexe) de taille $d \times d$, $u(\cdot)$ est une fonction du temps à valeurs dans $\mathbb{C}^d$, et où la condition initiale $u(0)$ est connue.

On rappelle que dans $\mathbb{C}^d$ on peut trouver une base dans laquelle s'écrit

$$A = D + N$$

avec D diagonale, N nilpotente ($N^d = 0$), et $[D, N] = DN - ND = 0$. (Rappel : si $P(X) = \Pi_{k=1}^{K}(X - \lambda_k)^{m_k}$ est le polynôme caractéristique, il faut commencer par remarquer que les sous-espaces caractéristiques $E_k = \ker(A - \lambda_k I)^{m_k}$ sont stables, avec $\oplus_k E_k = \mathbb{C}^d$, et écrire dans chaque sous espace $A_{|E_k} = \lambda_k I_{E_k} + (A - \lambda_k I)_{|E_k}$).

1. Donner une condition sur les valeurs propres λ_k pour que le système soit stable, c'est à dire qu'il existe C tel que $\|u(t)\| \leq C\|u(0)\|$ pour tout $t \geq 0$.

Correction: Après un changement de base la solution s'écrit donc $u(t) = \exp(tD + tN)u_0$ et comme $[D, N] = 0$ c'est $\exp tD(\sum_{n=0}^{d} N^n/n!)u(0)$. Si $u(0)$ est dans le sous-espace associé à la valeur propre λ_k on a même plus précisément $u(t) = e^{t\lambda_k}(\sum_{n=0}^{d} t^n N^n/n!)u(0)$. Ceci reste borné (si non nul) si et seulement si $\mathcal{R}e(\lambda_k) < 0$, ou $\mathcal{R}e(\lambda_k) = 0$ et $N_{|E_k} = 0$.

Le système est donc stable si et seulement si les valeurs propres ont toutes leurs parties réelles strictement négatives (ou nulles, lorsque la matrice N associée est nulle également).

2. On suppose que la condition de stabilité est vérifiée. Le *schéma explicite* consiste à calculer la suite de vecteurs $u^n \in \mathbb{C}^d$, définis par

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = Au^n \ ,$$

avec $u^0 = u(0)$. Quant au *schéma implicite*, il consiste à calculer u^{n+1} en fonction de u^n en résolvant le système linéaire

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = Au^{n+1} \ ,$$

toujours avec $u^0 = u(0)$. On dit qu'un schéma est stable si l'inégalité de stabilité suivante est satisfaite :

$$\|u^n\| \leq C\|u^0\|$$

pour tout temps (*i.e.*, $\forall n \geq 1$). Montrer que le schéma explicite est soit toujours instable, soit n'est stable que si Δt est assez petit, tandis que le schéma implicite est presque toujours stable.

Correction: L'itération du schéma explicite est $u^{n+1} = (I + \Delta t A)u^n$, celle du schéma implicite est $u^{n+1} = (I - \Delta t A)^{-1}u^n$. On a donc dans un cas

$$u^n = (I + \Delta t(D + N))^n u^0$$

et dans l'autre

$$u^n = (I - \Delta t(D + N))^{-n} u^0.$$

Dans le premier cas, on peut écrire si u^0 est dans le sous-espace caractéristique E_k,

$$u^n = \sum_{l=0}^{\min\{n,d\}} C_n^l (1 + \Delta t \lambda_k)^{n-l} \Delta t^l N^l u^0.$$

Si $|1 + \Delta t \lambda_k| < 1$, u^n va rester bornée (et même tendre vers zéro). Si $|1 + \Delta t \lambda_k| > 1$, on peut trouver des u_0 tels que u^n tend exponentiellement vers l'infini. Si $|1 + \Delta t \lambda_k| = 1$ alors pour u^0 tel que $Nu^0 \neq 0$, $N^2 u^0 = 0$, on voit que

$$u^n = (1 + \Delta t \lambda_k)^n u^0 + (1 + \Delta t \lambda_k)^{n-1} n \Delta t N u^0$$

tend aussi vers l'infini (mais plus lentement) quand $n \to \infty$.

Si $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ la condition de stabilité est donc que $(1 + \Delta t \alpha_k)^2 + \Delta t^2 \beta^2 \leq 1$, ce qui est vrai dès que $\Delta t \leq -2\alpha_k/(\alpha^2 + \beta^2)$. Si $\alpha_k < 0$ il suffit de prendre Δt assez petit. Sinon, la condition peut n'être jamais vérifiée.

Pour le schéma implicite, remarquons que la matrice $(I - \Delta t A) = (I - \Delta t(D + N))$ a toutes ses valeurs propres $(1 - \Delta_t \alpha_k) - i \Delta t \beta_k$ de module ≥ 1 (1 seulement si $\lambda_k = 0$). Donc son inverse s'écrit $D' + N'$ avec toutes les valeurs propres (μ'_k) de D' de module ≤ 1, et on a si $u_0 \in E_k$

$$u^n = \sum_{l=0}^{\min\{n,d\}} C_n^l \mu_k'^{(n-l)} N'^l u_0.$$

A nouveau si une valeur propre a module 1 (ce qui correspond au cas $\lambda_k = 0$) et si $N_{|E_k} \neq 0$, le schéma peut diverger, par contre, si $\lambda_k = 0 \Rightarrow N_k = 0$ et sinon $\lambda_k < 0$ (de sorte que $|\mu'_k| < 1$), le schéma va être inconditionnellement stable.

3. Discuter le cas de l'équation

$$\begin{cases} v'' + v = 0 \\ v(0) = v_0 \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Correction: On commence par ramener le problème à la forme du premier ordre $u' = Au$: on écrit

$$u = \begin{pmatrix} v' \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2d}, \qquad u' = \begin{pmatrix} v'' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u = Au.$$

Les valeurs propres de A sont i et $-i$. Par conséquent, dans le schéma explicite, les valeurs propres sont $1 \pm \Delta t i$ qui ont module > 1 et le schéma est instable. Pour le schéma implicite, les valeurs propres sont $(1 \pm \Delta t i)^{-1}$, de module < 1, et le schéma est stable.

II - Exponentielles de matrice

On considère un problème d'évolution de la forme

$$\dot{X} = u(t)AX + (1 - u(t))BX, \qquad X(0) = x \in \mathbb{R}^d \tag{1}$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^d$, $u \in [0,1]$ est un contrôle (mesurable, c'est à dire que l'intégrale $\int_t^{t'} u(s)ds$ est bien définie et continue par rapport à t, t') et A, B deux matrices $d \times d$.

1. Vérifier que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique toujours dans cette situation, et que X est bien définie, quel que soit u. (La dérivée temporelle a dans ce cas un sens "faible" dans l'équation.)

Correction: Le principe de la démonstration de C.-L. consiste à chercher X continu point fixe dans $C^0([0,T])$ de la transformation

$$X(\cdot) \mapsto Y : \begin{cases} [0,T] \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto x + \int_0^t \big(u(s)AX(s) + (1-u(s))BX(s)\big)ds. \end{cases}$$

Cette transformation est bien une contraction pour la norme uniforme $\|X\|_{C^0} = \sup_{t\in[0,T]} \|X(t)\|_{\mathbb{R}^d}$ (où $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$) dès que $T < 1/(\max\{\|A\|, \|B\|\})$ (où on utilise la norme matricielle induite par $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^d}$).

3. Rappel : vérifier que la solution de $\dot{X} = AX$ est donnée par $X(t) = \exp(tA)X(0)$, où

$$e^{tA} := \sum_{n\geq 0} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Correction: On peut dériver chaque terme dans la somme, pour $n \geq 1$:

$$\frac{d}{dt}\frac{(tA)^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n = A\left(\frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

et on conclut aisément. On peut aussi remarquer que

$$\frac{1}{\varepsilon}(e^{(t+\varepsilon)A} - e^{tA}) = e^{tA}\frac{1}{\varepsilon}(e^{\varepsilon A} - 1)$$

et que

$$\frac{1}{\varepsilon}(e^{\varepsilon A} - 1) = A + \sum_{n\geq 1} \frac{\varepsilon^n A^{n+1}}{(n+1)!} = A + O(\varepsilon).$$

2. On suppose que $u(t) = \chi_E(t) \in \{0,1\}$, la caractéristique d'un ensemble $E = \bigcup_{i\geq 0}[t_{2i}, t_{2i+1}] \subset [0,T]$ avec $(t_k)_{k\geq 0}$ une suite (strictement) croissante de réels dans $[0,T]$ avec $t_0 = 0$ pour simplifier. Donner une expression pour $X(t)$. Montrer que cette expression se simplifie lorsque $[A,B] = AB - BA = 0$.

Correction: On a évidemment

$$X(t) = \begin{cases} e^{(t-t_{2i})A}e^{(t_{2i}-t_{2i-1})B}e^{(t_{2i-1}-t_{2i-2})A}\cdots e^{(t_1-t_0)A}x & \text{si } t \in [t_{2i}, t_{2i+1}], \\ e^{(t-t_{2i+1})B}e^{(t_{2i+1}-t_{2i})A}e^{(t_{2i}-t_{2i-1})B}\cdots e^{(t_1-t_0)A}x & \text{si } t \in [t_{2i+1}, t_{2i+2}]. \end{cases}$$

Si A, B commutent alors $e^{tA}e^{sB} = e^{tA+sB}$ et la solution est simplement

$$e^{|E\cap[0,t]|A+|[0,t]\setminus E|B}x.$$

3. On suppose $d = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $s, t > 0$, $\exp(tA)$, $\exp(sB)$. Est-ce que A et B commutent ? Vérifier que $\exp(tA)\exp(sB) \neq \exp(sB)\exp(tA)$. Vérifier (sans faire de calculs) que $\exp(tA + sB)$ est différente.

Correction: Evidemment,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e^t A.$$

Pour $\exp(sB)$ on constate d'abord que $B^2 = I$, d'où $B^n = I$ si n pair, $B^n = B$ si n impair. Donc

$$e^{sB} = \left(\sum_{n\in 2\mathbb{N}} \frac{s^n}{n!}\right) I + \left(\sum_{n\in 2\mathbb{N}+1} \frac{s^n}{n!}\right) B = \cosh(s)I + \sinh(s)B.$$

On constate que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et de plus que $\exp(tA)\exp(sB) \neq \exp(sB)\exp(tA)$ car

$$e^{tA}e^{sB} = \begin{pmatrix} e^t\cosh(s) & e^t\sinh(s) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq e^{sB}e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t\cosh(s) & 0 \\ e^t\sinh(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Enfin, $\exp(tA + sB)$ étant symétrique est forcément différente de ces deux matrices, si $s > 0$.

4. On pose $C = A + B$. Montrer par récurrence que pour $n \geq 1$, $C^n = \varphi_n C + \varphi_{n-1} I$ où $(\varphi_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, \dots)$ est la suite de Fibonacci, donnée par $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ (et $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1$). En déduire une expression de $\exp(C)$.

Correction: Remarquons que

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = C + I.$$

Donc si $C^n = \varphi_n C + \varphi_{n-1} I$ (hypothèse de récurrence vérifiée pour $n = 1$ et $n = 2$), $C^{n+1} = \varphi_n(C + I) + \varphi_{n-1}C = \varphi_{n+1}C + \varphi_n I$.

On en déduit que

$$e^{A+B} = e^C = \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi_n}{n!} C + I + \sum_{n\geq 1} \frac{\varphi_n}{(n+1)!} I.$$

On peut aussi utiliser la relation $\varphi_n = (\varphi^n - \varphi'^n)/\sqrt{5}$ où $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ est le nombre d'or, et $\varphi' = -1/\varphi = (1 - \sqrt{5})/2$:

$$e^C = \frac{e^{\varphi} - e^{\varphi'}}{\sqrt{5}} C + I + \frac{(e^{\varphi} - 1)/\varphi - (e^{\varphi'} - 1)/\varphi'}{\sqrt{5}} I,$$

expression très éloignée de $e^A e^B$ ou $e^B e^A$. (On aurait pu aussi diagonaliser la matrice, qui a précisément pour valeurs propres φ, φ'.)

5. *"Splitting de Strang"*. On suppose maintenant que pour N fixé, $t_i = \frac{i}{2}(s+t)/N$ pour i pair, $0 \leq i \leq N$, et $t_i = t_{i-1} + t/N$ si i est impair. On appelle $X^N(\cdot)$ la solution de (1) pour $u(t) = \chi_E(t)$, $E = \bigcup_{i \geq 0}[t_{2i}, t_{2i+1}]$. Montrer que même si A et B ne commutent pas,

$$\lim_{N \to \infty} X^N(s+t) = e^{sA+tB}x.$$

On pourra supposer que $s = t = 1$ et on commencera par vérifier que

$$e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)$$

où la matrice C est uniformément bornée. On concluera en donnant l'expression générale de $X^N(2)$.

Correction: Par définition

$$e^{\frac{1}{N}A} = \left(I + \tfrac{1}{N}A + \tfrac{A^2}{N^2} \sum_{n \geq 0} \left(\tfrac{A}{N}\right)^n \tfrac{1}{(n+2)!}\right)$$

et le terme dans la somme est clairement une matrice bornée uniformément (par exemple par $\sum_{n \geq 0} \|A\|^n/(n+2)! \leq \exp \|A\|$). Donc la décomposition

$$e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)$$

est évidente. Maintenant,

$$X^N(2) = \left(I + \frac{A+B}{N} + \frac{C_N}{N^2}\right)^N x = \sum_{k=0}^{N} \frac{N!}{(N-k)!} \frac{(A+B+C_N/N)^k}{N^k k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \tfrac{i}{N}) \frac{(A+B+C_N/N)^k}{k!}$$

et on conclut en montrant (comme chaque terme de la série est borné par un élément d'une série convergente) que ceci tend vers

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!}$$

quand $N \to \infty$.

III - Modèle proie-prédateur (équation de Volterra)

On suppose qu'on a un milieu peuplé par deux populations, une proie $x(t)$ et un prédateur $y(t)$. Spontanément, la population de proies a tendance à croitre à taux a ($\dot{x} = ax$) tandis que celle de prédateurs, à jeun, décroit à taux c ($\dot{y} = -cy$). Mais en contact l'une de l'autre, la population de proies subit des pertes à taux $-bxy$ (le nombre de rencontres est supposé proportionnel à xy)

tandis que la population de prédateurs se requinque, et le système qui régit les populations est alors

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + fxy \end{cases} \tag{2}$$

avec $a, b, c, f > 0$.

1 Montrer que si $x(0), y(0) > 0$ les trajectoires restent à valeurs positives.

Correction: On est dans le cadre de Cauchy-Lipschitz [localement Lipschitzien, ce qui est une extension du cours], et notamment les trajectoires ne peuvent pas se croiser. Or $(x_0e^{at}, 0)$ et $(0, y_0e^{-ct})$ sont des trajectoires.

2 Trouver une intégrale première du mouvement, c'est-à-dire une fonction $V(x, y)$ constante le long des trajectoires.

Correction: Le système peut se réécrire

$$\frac{\dot{x}}{ax - bxy} = \frac{\dot{y}}{-cy + fxy} \Leftrightarrow \frac{\dot{x}}{x}(fx - c) = \frac{\dot{y}}{y}(a - by)$$

et on peut en déduire que

$$\frac{d}{dt}(fx - c\ln x) = \frac{d}{dt}(a\ln y - by)$$

Par conséquent la fonction

$$V(x, y) = fx - c\ln x + by - a\ln y$$

est conservée le long des trajectoires. On observe que cette fonction est convexe, et que ses lignes de niveaux sont bornées.

3 On considère une solution maximale $(x(t), y(t))$ de l'équation, avec $x(0) > 0$, $y(0) > 0$, c'est-à-dire définie sur $[0, t_{\max}[$ et qu'on ne peut pas prolonger, soit que $\lim_{t \to t_{\max}} \|(x(t), y(t))\| = +\infty$ soit que $t_{\max} = +\infty$. Montrer que forcément, $t_{\max} = +\infty$, et que la trajectoire est périodique.

Correction: La question précédente montre que pour tout t, $V(x(t), y(t)) = V(x(0), y(0))$. Les lignes de niveau sont compactes, donc les trajectoires ne peuvent pas s'évader à l'infini (en particulier la vitesse reste bornée). Par ailleurs, $(\dot{x}, \dot{y}) = 0$ si et seulement si $y = a/b$, $x = c/f$ qui est le seul point critique de V dans $]0, +\infty[^2$ (et point de minimum), donc soit la solution est $(c/f, a/b)$ (constante), soit la vitesse reste bornée inférieurement. En effet

$$\min_{V(x,y)=V(x(0),y(0))} \|(ax - bxy, -cy + fxy)\| > 0$$

puisque ce min est atteint et que la vitesse n'est jamais nulle en dehors de $(c/f, a/b)$, pour $x, y > 0$.

Comme les lignes de niveau de V ont une longueur finie (ce sont des courbes convexes et C^∞), il existe forcément $T > 0$ tel que $(x(T), y(T)) = (x(0), y(0))$, et par unicité, la trajectoire doit alors être T-périodique.

4. Calculer les populations moyennes de proies et de prédateurs au cours du temps. On suppose que x est y sont des populations de poissons, dont seule la proie est comestible, et que la pêche prélève un taux fixe (petit) $\varepsilon > 0$ de poissons (dans chacune des deux populations). Quelle est la nouvelle population moyenne ? On s'intéressera à la population de proies, et à la population totale.

Correction: Soit T la période, la population moyenne de proies est, en utilisant $x = (\dot{y} + cy)/(fy)$,

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\frac{\dot{y}}{fy} + \frac{c}{f}\Big)dt = \frac{1}{f}\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{T} + \frac{c}{f} = \frac{c}{f}.$$

De même la population moyenne de prédateurs est a/b. Si on prélève un taux ε de proies la nouvelle équation des proies est

$$\dot{x} = (a - \varepsilon)x - bxy,$$

de même celle des prédateurs devient

$$\dot{y} = -(c + \varepsilon)y + fxy.$$

Le nouveau taux moyen de proies est $(c + \varepsilon)/f$, le fait de prélever des prédateurs augmente le nombre de proies disponibles (ce qui n'est pas si surprenant). Par contre, on observe aussi que la population totale de poissons est $(a - \varepsilon)/b + (c + \varepsilon)/f = (a/b + c/f) + \varepsilon(b - f)/bf$, et peut augmenter si $b > f$ (ce qui est plus surprenant).