Cours MAP434, «Contrôle de modèles dynamiques»
Séance 2, 15 Avril 2015
STABILITÉ. OPTIMISATION

Rappel de cours : Equations différentielles, notions d'optimisation

I - Schéma d'Euler explicite, Schéma de Runge-Kutta

On veut discrétiser l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une fonction L-Lipschitzienne. On fixe un temps maximal T et on appelle $x(t) : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ la solution partant de x_0.

1. Justifier l'existence et l'unicité de la solution.

Correction: C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. *Schéma d'Euler explicite.* On fixe un pas de temps $h > 0$ et on définit pour $t > 0$ par récurrence une suite x_n^h donnée par $x_{n+1}^h = x_n^h + hf(x_n^h)$. Vérifier que pour tout n tel que $(n+1)h \leq T$,

$$|x_{n+1}^h - x((n+1)h)| \leq (1 + hL)|x_n^h - x(nh)| + LC\frac{h}{2}^2 \tag{1}$$

où C est une constante que l'on explicitera.

Correction: Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} x_{n+1}^h - x((n+1)h) &= x_n^h - x(nh) + \int_0^h f(x_n^h) - f(x(nh+s))\, ds \\ &= x_n^h - x(nh) + h(f(x_n^h) - f(x(nh))) + \int_0^h f(x(nh)) - f(x(nh+s))\, ds \end{aligned}$$

d'où

$$|x_{n+1}^h - x((n+1)h)| \leq |x_n^h - x(nh)| + hL|x_n^h - x(nh)| + \int_0^h L|x(nh) - x(nh+s)|\, ds.$$

Remarquons alors que $x(nh) - x(nh+s) = \int_0^s f(x(nh+t))dt \leq s \max_{[0,T]} |f(x(t))|$, d'où en posant $C = \max_{[0,T]} |f(x(t))|$,

$$\int_0^h L|x(nh) - x(nh+s)|\, ds \leq LC\frac{h}{2}^2.$$

3. Montrer que si une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifie $a_{n+1} \leq ra_n + b$ pour tout n, avec $r > 0$, $r \neq 1$, et $b \in \mathbb{R}$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leq r^n a_0 + b\frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Correction: C'est élémentaire par récurrence.

4. En déduire que tant que $nh \le T$,

$$|x_n^h - x(nh)| \le \frac{Ch}{2}\left[(1+hL)^n - 1\right],$$

et vérifier que $(1+hL)^n \le e^{LT}$. Conclure : comment faut-il choisir h pour approcher la solution à ε près en norme uniforme sur $[0,T]$?

Correction: la suite $e_n = |x_n^h - x(nh)|$ vérifie $e_0 = 0$,

$$e_{n+1} \le (1+hL)e_n + LC\frac{h}{2}^2.$$

Donc, en utilisant que $e_0 = 0$ et la question précédente,

$$e_n \le LC\frac{h}{2}^2 \frac{(1+hL)^n - 1}{1+hL-1} = \frac{Ch}{2}((1+hL)^n - 1).$$

Or, comme $\ln(1+x) \le x$,

$$(1+hL)^n = \exp(n\ln(1+hL)) \le e^{nhL} \le e^{LT}$$

si $nh \le T$. Il faut prendre $h \lessapprox (2\varepsilon/C)e^{-LT}$ pour approcher correctement $u(t)$, l'erreur est donc d'ordre 1 mais la constante devant devient rédhibitoire pour des grandes valeurs de TL (qui est un nombre sans dimension).

5. *Schéma de Runge-Kutta d'ordre 2.* On suppose maintenant que f a un gradient L'-Lipschitzien, et on considère l'approximation suivante, d'ordre supérieur :

$$\begin{cases} x_{n+1/2}^h = x_n^h + \frac{h}{2}f(x_n^h), \\ x_{n+1}^h = x_n^h + hf(x_{n+1/2}^h) \end{cases}$$

ou tout simplement $x_{n+1}^h = x_n^h + hf(x_n^h + (h/2)f(x_n^h))$. Montrer que

$$x_{n+1/2}^h - x((n+\tfrac{1}{2})h) \le (1+\tfrac{h}{2}L)|x_n^h - x(nh)| + LC\frac{h}{8}^2, \text{ et}$$

$$|x_{n+1}^h - x((n+1)h)| \le |x_n^h - x(nh)| + Lh\left((1+\tfrac{h}{2}L)|x_n^h - x(nh)| + LC\frac{h}{8}^2\right) + \int_0^h \left|f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h)\right) - f(x(nh+s))\right| ds$$

Correction: Il suffit d'appliquer l'inégalité de la partie précédente, cette fois avec $h/2$ au lieu de h.

6. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 avec g' λ-Lipschitzienne, pour tous $t, s \in \mathbb{R}$,

$$|g(t+s) - 2g(t) + g(t-s)| \leq \lambda s^2.$$

En déduire qu'il existe une constante c telle que

$$\int_0^h f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h)\right) - f(x(nh+s))ds \leq ch^3$$

et donc qu'il existe $c' > 0$ (dépendant de $L, L', C = \max_{[0,T]} |f(x(t))|$) telle que

$$|x_{n+1}^h - x((n+1)h)| \leq (1 + Lh + \tfrac{1}{2}L^2h^2)|x_n^h - x(nh)| + c'h^3.$$

Correction: Il suffit de faire un développement limité : par exemple,

$$g(t+s) - 2g(t) + g(t-s) = \int_0^s g'(t+\tau) - g'(t-\tau)d\tau \leq \lambda s^2.$$

Après, on remarque que

$$\begin{aligned} &\int_0^h f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h)\right) - f(x(nh+s))ds \\ &\qquad = \int_{-h/2}^{h/2} f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h)\right) - f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h+s)\right) ds \\ &\qquad = \int_0^{h/2} 2f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h)\right) - f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h+s)\right) - f\left(x((n+\tfrac{1}{2})h-s)\right) ds \leq c\frac{h^3}{24} \end{aligned}$$

où c est la constante de Lipschitz de la dérivée de $f(x(t))$, $f'(x(t))f(x(t))$ (majorée par $L'C^2 + L^2C$).

7. En déduire une estimation d'erreur pour $\sup_{nh \leq T} |x_n^h - x(nh)|$. Comment faut-il choisir h pour approcher la solution à ε près sur $[0, T]$?

Correction: En appliquant la question **3.** on trouve :

$$\sup_{nh \leq T} |x_n^h - x(nh)| \leq \frac{c'}{L} h^2 \frac{(1 + Lh + \frac{1}{2}L^2h^2)^n - 1}{1 + \frac{1}{2}Lh}.$$

On a $(1 + Lh + \frac{1}{2}L^2h^2)^n \leq \exp(LT(1 + Lh/2))$ et il faut donc désormais $h \lessapprox \sqrt{\varepsilon}\exp(-LT/2)$, ce qui est un peu meilleur, au moins pour T pas trop grand. Remarquons que si on doit évaluer deux fois la fonction f à chaque itération, le fait de faire un nombre de calculs d'ordre $e^{LT/2}/\sqrt{\varepsilon}$ au lieu de e^{LT}/ε pour la même erreur réduit en fait grandement les calculs (la constante dépend bien sûr de la régularité de Df).

II - Linéarisation et stabilité

On considère $(x(t), y(t))$ solution du système

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - (x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -2xy. \end{cases}$$

1. Montrer qu'il existe une trajectoire partant de tout point initial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Que peut-on dire du temps d'existence ? Déterminer les points d'équilibre.

Correction: C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz, mais dans le cas général : le système est localement Lipschitzien mais non Lipschitzien. Les solutions peuvent donc tendre vers l'infini en temps fini. Par exemple : $y = 0$, $x = -\cosh(1-t)/\sinh(1-t)$.

Les points d'équilibre sont les points où $\dot{x} = \dot{y} = 0$, soit $x^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ ou $y = 0$: $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$.

2. En chacun des points d'équilibre donner le système linéarisé associé et discuter sa stabilité. Quand c'est possible, en déduire des informations sur la stabilité du système non-linéaire.

Correction: **a.** En $(1, 0)$, on cherche une trajectoire de la forme $(1 + \xi, \eta)$, qui va vérifier

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1 - (1 + 2\xi + \xi^2 + \eta^2) = -2\xi + o(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = -2(1+\xi)\eta = -2\eta + o(\xi, \eta), \end{cases}$$

et le système linéarisé est donc $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = -2(\xi, \eta)$. La solution est évidemment stable ($e^{-2t}(\xi_0, \eta_0)$), cf. le théorème 1.5.1 du poly. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ tel que $|(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + 2(\xi, \eta)| \leq \varepsilon |(\xi, \eta)|$ si $|(\xi, \eta)| \leq \delta$. Dans ce cas, on voit que

$$\frac{d}{dt}|(\xi, \eta)|^2 = 2(\xi, \eta) \cdot (\dot{\xi}, \dot{\eta}) \leq -4|(\xi, \eta)|^2 + 2\varepsilon |(\xi, \eta)|^2$$

et on en déduit (en procédant comme dans la preuve du lemme de Gronwall, cf. exercice III.2) que $|(\xi, \eta)| \leq |(\xi_0, \eta_0)| \exp(-(2-\varepsilon)t)$ tant que $|(\xi, \eta)| \leq \delta$: le système perturbé retourne donc à l'équilibre.

b. En $(-1, 0)$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1 - (1 - 2\xi + \xi^2 + \eta^2) = 2\xi + o(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = -2(-1+\xi)\eta = 2\eta + o(\xi, \eta), \end{cases}$$

et le système linéarisé est donc $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = 2(\xi, \eta)$ dont la solution est évidemment instable ($e^{2t}(\xi_0, \eta_0)$). Cette fois, on voit que même si (ξ_0, η_0) est petit, la trajectoire s'éloigne forcément de l'équilibre, en écrivant par exemple :

$$\frac{d}{dt}|(\xi, \eta)|^2 = 2(\xi, \eta) \cdot (\dot{\xi}, \dot{\eta}) \geq 4|(\xi, \eta)|^2 - 2\varepsilon |(\xi, \eta)|^2,$$

d'où $|(\xi, \eta)| \geq |(\xi_0, \eta_0)| \exp((2-\varepsilon)t)$ tant que $|(\xi, \eta)|$ est assez petit : le système ne peut jamais atteindre le point $(-1, 0)$.

c. En $(0, 1)$:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = 1 - (\xi^2 + 1 + 2\eta + \eta^2) = -2\eta + o(\xi, \eta) \\ \dot{\eta} = -2\xi(1+\eta) = -2\xi + o(\xi, \eta), \end{cases}$$

et le linéarisé est $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) = -2(\eta, \xi)$. On en déduit facilement l'évolution de $\xi + \eta$ et $\xi - \eta$, et la solution est $\xi = \xi_0 \cosh(2t) - \eta_0 \sinh(2t)$, $\eta = -\xi_0 \sinh(2t) + \eta_0 \cosh(2t)$. Le linéarisé a un sous-espace stable et un instable. Le problème est instable puisque dès que la variable $\xi - \eta$ n'est pas nulle elle va croitre.

c. En $(0, -1)$: même type de situation.

3. On introduit la fonction

$$V(x,y) = xy^2 + \frac{x^3}{3} - x :$$

montrer que V est une fonction de Lyapunov, c'est-à-dire qu'elle décroit le long des trajectoires. Discuter la stabilité des équilibres trouvés à la question précédente en étudiant le comportement de V au voisinage des points d'équilibre.

Correction: On peut dériver

$$\frac{d}{dt}V(x(t),y(t)) = (y^2+x^2-1)(1-(x^2+y^2)) + 2xy*(-2xy) = -(\dot{x}^2+\dot{y}^2) < 0$$

sauf aux points stationnaires, où c'est zéro. Donc V décroit le long des trajectoires. On peut également noter que le champ de vecteurs f étant à rotationnel nul, il dérive d'un potentiel et que $f = -\nabla V$.

- en $(1,0)$, $V(1+\xi,\eta) = -2/3 + \eta^2 + \xi^2 + o(\xi^2+\eta^2)$. On retrouve que le point est stable, puisque $(1,0)$ est un minimum local strict (cf. le théorème 1.5.3 du poly).
- en $(-1,0)$, $V(-1+\xi,\eta) = 2/3 - \eta^2 - \xi^2 + o(\xi^2+\eta^2)$, et le point est bien instable : $(-1,0)$ est un maximum local strict.
- en $(0,1)$, $V(\xi,1+\eta) = 2\eta\xi + o(\xi^2+\eta^2)$, c'est un point selle (essentiellement instable).
- en $(0,-1)$, $V(\xi,-1+\eta) = -2\eta\xi + o(\xi^2+\eta^2)$, même type que le précédent.

Correction: Enfin, on peut remarquer que $X = x+y$ et $Y = x-y$ vérifient

$$\begin{cases} \dot{X} = 1 - X^2 \\ \dot{Y} = 1 - Y^2 \end{cases}$$

et par conséquent,

$$X(t) = \frac{X_0 \cosh t + \sinh t}{\cosh t + X_0 \sinh t}, \quad Y(t) = \frac{Y_0 \cosh t + \sinh t}{\cosh t + Y_0 \sinh t}$$

Les points $(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$ correspondent respectivement à $(X,Y) = (1,1),(-1,-1),(1,-1),(-1,1)$. Les points $X=-1$, $X=1$ sont effectivement stationnaires, et si $X_0 = 1+\xi_0$ on a

$$X(t) = \frac{\cosh t + \sinh t + \xi_0 \cosh t}{\cosh t + \sinh t + \xi_0 \sinh t} = 1 + \xi_0 \frac{\cosh t - \sinh t}{\cosh t + \sinh t + \xi_0 \sinh t} \to 1$$

quand $t \to \infty$, tandis que si $X_0 = -1+\xi_0$,

$$X(t) = \frac{-\cosh t + \sinh t + \xi_0 \cosh t}{\cosh t - \sinh t + \xi_0 \sinh t} = -1 + \xi_0 \frac{\cosh t + \sinh t}{\cosh t - \sinh t + \xi_0 \sinh t} \to 1$$

quand $t \to +\infty$. 1 est stable, et -1 est instable.

III - Flots, Gronwall. On considère, dans $\mathbb{R}^n$, un champ de vecteurs $v(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On le suppose uniformément Lipschitzien en x : il existe L tel que

$$|v(t,x) - v(t,y)| \leq L|x-y|$$

pour tout $t \geq 0$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^n$, où $|\cdot|$ désigne une norme sur $\mathbb{R}^n$.

On définit le flot de v comme l'application $X(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} X(t,x) = v(t, X(t,x)), \quad (t \geq 0) \\ X(0,x) = x. \end{cases}$$

1. Qu'est-ce qui permet d'affirmer que $X(t,x)$ est bien défini ?

Correction: C'est le Théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. *Lemme de Gronwall.* On considère $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$. On suppose que $u : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $t \geq 0$

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds.$$

Montrer que $u(t) \leq a e^{bt}$. En déduire que $X(t,\cdot)$ est e^{Lt}-Lipschitzien.

Correction: On écrit que $\left(e^{-bt} \int_0^t u \, ds\right)' \leq a e^{-bt}$, donc

$$e^{-bt} \int_0^t u(s) ds \leq \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})$$

et par conséquent $u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds \leq a e^{bt}$. On applique ensuite le résultat à l'inégalité

$$|X(t,x) - X(t,y)| \leq |x - y| + \int_0^t |v(t, X(s,x)) - v(t, X(s,y))| ds$$
$$\leq |x - y| + L \int_0^t |X(s,x)) - X(s,y)| ds.$$

3. En déduire que pour tout t, $x \mapsto X(t,x)$ est une bijection bi-Lipschitzienne (*i.e.*, un "$C^{0,1}$-difféomorphisme").

Correction: Surtout ne pas faire de calcul. Remarquer que si on fixe $T > 0$, $(t,x) \mapsto -v(T-t,x)$ est un champ de vecteur L-Lipschitzien sur $[0,T]$. Si on définit $Y(t,y)$ par

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} Y(t,y) = -v(T-t, Y(t,y)), \quad (t \in [0,T]) \\ Y(0,y) = y, \end{cases}$$

alors pour tout y on voit facilement que $X(T, Y(T,y)) = y$ (puisque $\dot{Y}(T-t,y) = v(t, Y(T-t,y))$, et par l'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz). Enfin la question précédente assure que $Y(t)$ est e^{Lt}-Lipschitzien : donc $X(T,\cdot)$ est bi-Lipschitzien. Remarquons que :

$$|X(T,x) - X(T,y)| \geq e^{-LT}|x - y|$$

les trajectoires se rapprochent mais restent toujours à distance strictement positive l'une de l'autre.

4. On suppose maintenant que

$$\nabla v(t,x) = \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t,x)\right)_{1\le i,j\le n}$$

est une matrice $n \times n$ L'-Lipschitzienne par rapport à x. Montrer que formellement, la matrice $A(t,x) = \nabla X(t,x)$ vérifie l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t}(t,x) = A(t,x)\nabla v(t, X(t,x)) \quad (t \ge 0) \\ A(0) = I. \end{cases}$$

Vérifier que cette équation admet une solution unique qui vérifie $|A(t)| \le e^{Lt}$ pour tout $t \ge 0$[1].

Correction: Il suffit de dériver l'équation. La fonction $x \mapsto \nabla v(t, X(t,x))$ étant $L'e^{Lt}$-Lipschitzienne, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. On remarque ensuite que $|A\nabla v| \le L|A|$, donc $|A| \le e^{Lt}$ par Gronwall.

5. Pour $a, b > 0$ on considère $u(t)$ qui vérifie

$$u \le a\frac{e^{2bt}-1}{2} + b\int_0^t u(s)ds.$$

Montrer que $u(t) \le ae^{bt}(e^{bt}-1)$. En déduire que la matrice A définie à la question précédente est Lipschitzienne en x.

Correction: A nouveau on écrit que

$$\left(e^{-bt}\int_0^t u(s)ds\right)' \le e^{-bt}\tfrac{1}{2}(e^{2bt}-1)a = a\sinh bt,$$

donc $\int_0^t u\,ds \le \frac{a}{b}e^{bt}(\cosh bt - 1)$. Par conséquent,

$$u \le ae^{bt}\sinh bt + ae^{bt}(\cosh bt - 1) = ae^{bt}(e^{bt}-1).$$

La matrice A vérifie, outre $|A| \le e^{Lt}$,

$$\begin{aligned} A(t,x) - A(t,y) &= \int_0^t A(s,x)\nabla v(s,X(s,x)) - A(s,y)\nabla v(s,X(s,y))ds \\ &= \int_0^t [A(s,x)-A(s,y)]\nabla v(s,X(s,x)) + A(s,y)[\nabla v(s,X(s,x)) - \nabla v(s,X(s,y))]ds \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |A(t,x)-A(t,y)| \le L\int_0^t |A(s,x)-A(s,y)|ds + \int_0^t e^{Ls}L'e^{Ls}|x-y|ds \\ = L'\frac{e^{2Lt}-1}{2L}|x-y| + L\int_0^t |A(s,x)-A(s,y)|ds \end{aligned}$$

1. Il s'agit ici de la norme d'opérateur associée à la norme Euclidienne, $|A| = \sup_{|x|\le 1}|Ax|$.

et on peut donc appliquer le résultat précédent avec $a = \frac{L'}{L}|x-y|$, $b = L$: on trouve

$$|A(t,x) - A(t,y)| \leq \tfrac{L'}{L} e^{Lt}(e^{Lt} - 1)|x-y|.$$

A est bien Lipschitzienne en espace.

6. Que pensez-vous que l'on puisse dire, dans ce cas, du difféomorphisme X ? Que peut-on dire si v est de classe $C^{k,1}$, $k \geq 2$ (c'est-à-dire, de classe C^k avec $D^k v$ Lipschitzien).

Correction: On peut montrer (c'est facile mais un peu trop long et calculatoire) que X est différentiable et $\nabla X = A$. Du coup, $X(t,\cdot)$ est $C^{1,1}$, et de même pour $X^{-1}(t,\cdot)$. En général, si v est $C^{k,1}$, $X(t,\cdot)$ sera un $C^{k,1}$-difféomorphisme.