Cours MAP434, «Contrôle de modèles dynamiques»
Séance 3, 22 Avril 2015
OPTIMISATION, CONTRAINTES

I - Minimisation quadratique sous contraintes affines

On pose $V = \mathbb{R}^n$ et on considère la fonctionnelle quadratique $J : V \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $v \in V$,

$$J(v) := \frac{1}{2}v^T Av - b^T v,$$

avec une matrice A symétrique définie positive d'ordre n et un vecteur $b \in \mathbb{R}^n$. On considère l'application $F : V \to \mathbb{R}^m$ telle que, pour tout $v \in V$,

$$F(v) := Cv - d,$$

avec une matrice rectangulaire C d'ordre $m \times n$ et $d \in \mathbb{R}^m$. On suppose que $m < n$ et que la matrice C est de rang maximal. L'objet de cet exercice est l'étude du problème de minimisation sous contraintes d'égalité

$$\inf_{v \in K} J(v), \qquad K := \{v \in V;\ F(v) = 0\}.$$

1. Montrer que J admet un et un seul minimiseur sur K.

Correction: L'ensemble K est convexe fermé et non vide (car C est de rang maximal), et la fonctionnelle J est fortement convexe sur V (de paramètre α égal à la plus petite valeur propre de A). L'existence et unicité du minimiseur sur K résulte du théorème 2.3.37 du poly.

2. Montrer que si u est le minimiseur de J sur K, alors il existe un et un seul vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que le couple $(u, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ soit solution du système linéaire

$$\left[\begin{array}{c:c} A & C^T \\ \hdashline C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u \\ \hdashline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b \\ \hdashline d \end{array}\right],$$

où C^T désigne la matrice transposée de C.

Correction: On applique le théorème 2.4.26. La fonctionnelle J est différentiable en $u \in K$ et on a

$$(J'(u), v) = v^T(Au - b), \qquad \forall v \in V.$$

Par ailleurs, l'ensemble K est déterminé par les m contraintes scalaires $F_i(v) = 0$ où $F_i(v)$ est la i-ème composante de $F(v)$ dans la base cartésienne de $\mathbb{R}^m$. Les vecteurs $F_i'(v)$ (de taille n) sont obtenus à partir des lignes de la matrice rectangulaire C et la famille $(F_i'(u))_{1\le i\le m}$ est libre car la matrice C est de rang maximal. Par suite, il existe un vecteur $\lambda = (\lambda_i)_{1\le i\le m}$ de $\mathbb{R}^m$ tel que

$$J'(u) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i F_i'(u) = 0,$$

ce qui s'écrit encore
$$Au + C^t\lambda = b.$$
De plus, comme $u \in K$, on a $Cu = d$. On en déduit que le couple (u, λ) est solution du système linéaire proposé. Noter que l'unicité de λ résulte du fait que les vecteurs $(F_i'(u))_{1\le i\le m}$ sont linéairement indépendants.

3. Montrer que la matrice ci-dessus est inversible.

Correction: Montrons que la matrice du système linéaire est inversible. Il suffit de montrer que son noyau est réduit à zéro. Soit $(v, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tel que
$$\left[\begin{array}{c:c} A & C^t \\ \hdashline C & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v \\ \hdashline \mu \end{array}\right] = 0.$$
La matrice A étant inversible, on obtient à partir de la première équation $v = -A^{-1}C^T\mu$, et en reportant dans la deuxième équation, il vient
$$CA^{-1}C^T\mu = 0.$$
En prenant le produit scalaire avec μ, on obtient
$$(C^T\mu)^T A^{-1}(C^T\mu) = 0.$$
La matrice A étant définie positive, la matrice A^{-1} l'est également et il vient $C^T\mu = 0$. Comme $\mathrm{Ker}(C^T) = \{0\}$ (car C est de rang maximal), on déduit $\mu = 0$, d'où finalement $v = -A^{-1}C^T\mu = 0$.

II -

Minimisation sur la sphère

Les problèmes d'optimisation avec la contrainte d'être dans la sphère unité interviennent dans diverses applications où on cherche un minimiseur de norme unité. Or, en dimension infinie, les théorèmes d'existence reposent sur une hypothèse de convexité du sous-ensemble K définissant les contraintes. L'objectif de cet exercice est d'étudier un exemple où l'existence d'un minimiseur résulte d'un argument de compacité (et non de complétude).

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On considère l'espace de Hilbert $V = H_0^1(\Omega)$ et le sous-ensemble
$$K := \{v \in V;\ \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1\}.$$
On s'intéresse à la minimisation dans K de la fonctionnelle $J : V \ni v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d} \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que K est fermé dans V.

Correction: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de K convergeant vers v dans V. Alors, $1 = \|v_n\|_{L^2(\Omega)} \to \|v\|_{L^2(\Omega)}$ quand n tend vers $+\infty$, si bien que $v \in K$.

2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante dans K. Montrer que

$$\frac{1}{4}\|\nabla(v_n - v_p)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \leq \frac{1}{2}J(v_n)^2 + \frac{1}{2}J(v_p)^2 - \left\|\frac{v_n + v_p}{2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \inf_{v\in K} J(v)^2.$$

Correction: Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante dans K. L'égalité de la médiane donne

$$\begin{aligned}\left\|\nabla\left(\frac{v_n - v_p}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \left\|\nabla\left(\frac{v_n + v_p}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^d} &= \frac{1}{2}\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{2}\|\nabla v_p\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\ &= \frac{1}{2}J(v_n)^2 + \frac{1}{2}J(v_p)^2.\end{aligned}$$

De plus,

$$\left\|\nabla\left(\frac{v_n + v_p}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \left\|\frac{v_n + v_p}{2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} J\left(\frac{v_n + v_p}{\|v_n + v_p\|_{L^2(\Omega)}}\right)^2,$$

et comme $\frac{v_n+v_p}{\|v_n+v_p\|_{L^2(\Omega)}} \in K$, on en déduit

$$\left\|\nabla\left(\frac{v_n + v_p}{2}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)^d} \geq \left\|\frac{v_n + v_p}{2}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \inf_{v\in K} J(v)^2.$$

En reportant, on obtient l'inégalité demandée.

3. En déduire l'existence d'un minimiseur global de J sur K (Indication : utiliser le théorème de Rellich). Donner un exemple d'un tel minimiseur.

Correction: La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minimisante, il est clair que la suite $(\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^d})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (dans $\mathbb{R}$). La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant par ailleurs dans K, elle est bornée dans $L^2(\Omega)$. Cette suite est donc bornée dans $H^1(\Omega)$. De par le théorème de Rellich, à une sous-suite extraite près que l'on ne renumérote pas pour alléger les notations, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain v dans $L^2(\Omega)$ et en passant à la limite dans la relation $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$, on déduit que $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. En faisant tendre n et p vers $+\infty$ dans l'inégalité obtenue à la question 2, on voit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $H^1_0(\Omega)$. Cette suite converge donc vers v dans $H^1_0(\Omega)$ (le fait que la limite soit bien v se montre en utilisant l'argument usuel basé sur des fonctions tests), ce qui montre que v est un minimiseur de J sur K. Enfin, minimiser la fonctionnelle J sur K revient à minimiser le quotient de Rayleigh sur V ; un minimiseur de J sur K est donc le premier mode propre du Laplacien avec condition limite de Dirichlet (ce minimiseur est unique si Ω est connexe ; c'est le théorème de Krein–Rutman).

III - Contrôle optimal et état adjoint

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$. On pose $V = H_0^1(\Omega)$ et $Y = L^2(\Omega)$. Soit $f \in L^2(\Omega)$ fixé. Pour tout $y \in Y$, on note $v := \Psi_f(y)$ l'unique solution dans V du problème

$$-\Delta v = f + y \quad \text{dans } \Omega. \tag{1}$$

Le problème consiste minimiser la fonctionnelle $J : Y \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $y \in Y$,

$$J(y) = \int_\Omega |\Psi_f(y)(x) - v_0(x)|^2 dx + \int_\Omega |y(x)|^2 dx,$$

pour $v_0 \in Y$ donné. Il s'agit d'un problème de contrôle optimal où on cherche à agir par le biais de la fonction $y \in Y$ de façon à rapprocher le plus possible la solution du problème (1) d'une cible v_0 donnée. Le deuxième terme dans la fonctionnelle J signifie qu'on réalise un compromis entre cet objectif et l'ampleur du contrôle y.

1. Montrer que, pour tout $(y, z) \in Y \times Y$, on a $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) = \Psi_0(y - z)$. Montrer que l'application Ψ_0 est linéaire continue de Y dans Y.

Correction: Soit $y, z \in Y$. Il est clair que $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) \in V$. De plus,

$$-\Delta(\Psi_f(y) - \Psi_f(z)) = (f + y) - (f + z) = y - z.$$

D'où $\Psi_f(y) - \Psi_f(z) = \Psi_0(y - z)$. La linéarité de l'application Ψ_0 est évidente. Quant à la continuité, pour tout $z \in Y$, comme $-\Delta\Psi_0(z) = z$ dans Ω, on a

$$\|\nabla\Psi_0(z)\|^2_{L^2(\Omega)^d} = \langle z, \Psi_0(z)\rangle_{L^2(\Omega)} \leq C_P\|z\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\Psi_0(z)\|_{L^2(\Omega)^d},$$

grâce à l'inégalité de Poincaré. Par suite, $\|\nabla\Psi_0(z)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C_P\|z\|_{L^2(\Omega)}$ et en utilisant à nouveau l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\Psi_0(z)\|_Y \leq C_P\|\nabla\Psi_0(z)\|_{L^2(\Omega)^d} \leq C_P^2\|z\|_Y.$$

Ceci montre la continuité de l'application Ψ_0.

2. Montrer que la fonctionnelle J est différentiable sur Y avec, pour tout $y, z \in Y$,

$$\langle J'(y), z\rangle_{Y',Y} = 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx.$$

Correction: Pour tout $y, \delta \in Y$, il vient

$$\begin{aligned}
J(y+\delta) &= \int_\Omega |\Psi_f(y+\delta)(x) - v_0(x)|^2 dx + \int_\Omega |y(x) + \delta(x)|^2 dx \\
&= \int_\Omega |\Psi_f(y)(x) + \Psi_0(\delta)(x) - v_0(x)|^2 dx + \int_\Omega |y(x) + \delta(x)|^2 dx \\
&= J(y) + 2\Big\{\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(\delta)(x)dx + \int_\Omega y(x)\delta(x)dx\Big\} \\
&\quad + \Big\{\int_\Omega |\Psi_0(\delta)(x)|^2 dx + \int_\Omega |\delta(x)|^2 dx\Big\},
\end{aligned}$$

et le dernier terme entre accolades est un $o(\|\delta\|_Y)$ car il est majoré par $(1 + C_P^4)\|\delta\|_Y^2$. Il reste à vérifier que le premier terme entre accolades définit bien une application linéaire continue sur Y, ce qui est le cas car en utilisant la question précédente, il vient

$$2\left|\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(\delta)(x)dx + \int_\Omega y(x)\delta(x)dx\right| \leq 2(C_P^2\|\Psi_f(y)-v_0\|_Y+\|y\|_Y)\|\delta\|_Y.$$

3. Montrer que J est fortement convexe sur Y et en déduire l'existence et l'unicité du minimiseur global de J sur Y.

Correction: Pour tout $y, z \in Y$, on constate que

$$\begin{aligned}\langle J'(y) - J'(z), y - z\rangle_{Y',Y} &= 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - \Psi_f(z)(x))\Psi_0(y - z)(x)dx + 2\int_\Omega |y(x) - z(x)|^2 dx \\ &= 2\int_\Omega |\Psi_0(y - z)(x)|^2 dx + 2\int_\Omega |y(x) - z(x)|^2 dx \\ &\geq 2\int_\Omega |y(x) - z(x)|^2 dx = 2\|y - z\|_Y^2,\end{aligned}$$

d'où la forte convexité de J de paramètre $\alpha = 2$. L'existence et l'unicité du minimiseur global de J sur Y résulte du théorème 2.3.37 du poly, la continuité de J sur Y résultant de sa différentiabilité.

4. Pour $y \in Y$, on note $\hat{v} := \theta(y)$ l'unique solution dans V du problème $-\Delta\hat{v} = \Psi_f(y) - v_0$ dans Ω. Montrer que le représentant de Riesz de $J'(y)$ dans Y est la fonction $2(\theta(y) + y)$. On dit que $\theta(y)$ est *l'état adjoint* de $\Psi_f(y)$.

Correction: Par construction, il vient pour tout $z \in Y$,

$$\begin{aligned}\langle J'(y), z\rangle_{Y',Y} &= 2\int_\Omega (\Psi_f(y)(x) - v_0(x))\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\ &= 2\int_\Omega (-\Delta\theta(y))(x)\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\ &= 2\int_\Omega \nabla\theta(y)(x)\cdot\nabla\Psi_0(z)(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\ &= 2\int_\Omega \theta(y)(x)(-\Delta\Psi_0(z))(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx \\ &= 2\int_\Omega \theta(y)(x)z(x)dx + 2\int_\Omega y(x)z(x)dx = 2\int_\Omega (\theta(y) + y)(x)z(x)dx.\end{aligned}$$

IV - Une EDP non linéaire

Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$, et $f \in L^2(\Omega)$. L'objectif est de montrer, en utilisant les outils de l'optimisation, l'existence et l'unicité de la solution de l'EDP non linéaire

$$-\Delta u + u^3 = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{2a}$$
$$u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{2b}$$

On pose $V = H_0^1(\Omega)$, qu'on équipe de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}$, et on introduit la fonctionnelle $J : V \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $v \in V$,

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |v(x)|^4 dx.$$

On admet l'injection de Sobolev suivante : il existe une constante σ_Ω telle que, pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\|v\|_{L^4(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^4 dx\right)^{1/4} \leq \sigma_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

Cette inégalité signifie que l'espace $H_0^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^4(\Omega)$. (L'inégalité de Sobolev est vraie plus généralement pour tout $v \in H^1(\Omega)$ à condition d'utiliser dans le majorant la norme $\|v\|_{H^1(\Omega)}$.) Elle montre, en particulier, que la fonctionnelle J est bien définie.

1. Montrer que la fonctionnelle J est α-convexe sur V. (Indication : voir J comme la somme d'une fonctionnelle α-convexe et d'une fonctionnelle convexe.)

Correction: On constate que $J(v) = J_1(v) + J_2(v)$ avec

$$J_1(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d}, \qquad J_2(v) = \frac{1}{4}\|v\|^4_{L^4(\Omega)}.$$

La fonctionnelle J_1 est clairement 1-convexe sur $V = H_0^1(\Omega)$ équipé de la norme $\|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^d}$ puisque, grâce à l'égalité de la médiane (cf. TD13), il vient

$$\begin{aligned}
J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) &= \frac{1}{8}\|\nabla(v+w)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&= \frac{1}{4}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^d} + \frac{1}{4}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)^d} - \frac{1}{8}\|\nabla(v-w)\|^2_{L^2(\Omega)^d} \\
&= \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w) - \frac{1}{8}\|v-w\|^2_V.
\end{aligned}$$

De plus, la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto |t|^4 \in \mathbb{R}$ étant convexe, on obtient, pour tout $v, w \in V$, $\theta \in [0,1]$ et $x \in \Omega$,

$$|\theta v(x) + (1-\theta)w(x)|^4 \leq \theta|v(x)|^4 + (1-\theta)|w(x)|^4.$$

En intégrant sur Ω, on déduit que J_2 est convexe sur V. Par conséquent, pour tout $v, w \in V$, on a

$$J_1\left(\frac{v+w}{2}\right) \leq \frac{1}{2}J_1(v) + \frac{1}{2}J_1(w) - \frac{1}{8}\|v-w\|_V^2,$$
$$J_2\left(\frac{v+w}{2}\right) \leq \frac{1}{2}J_2(v) + \frac{1}{2}J_2(w),$$

et en sommant membre à membre ces deux inégalités, on voit que la fonctionnelle J est 1-convexe sur V.

2. On rappelle l'inégalité de Hölder : soit p, q deux réels tels que $1 \leq p, q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; alors, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $g \in L^q(\Omega)$, on a

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

(L'inégalité de Cauchy–Schwarz est un cas particulier de l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.) En déduire que, pour tout $v, w \in L^4(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega v^3(x)w(x)dx\right| \leq \|v\|_{L^4(\Omega)}^3\|w\|_{L^4(\Omega)}.$$

puis que, pour tout $v \in V$, l'application linéaire $L : V \ni w \longmapsto \int_\Omega v^3(x)w(x)dx \in \mathbb{R}$ est continue.

Correction: On applique l'inégalité de Hölder à $f = v^3$ et $g = w$ avec $p = \frac{4}{3}$ et $q = 4$ (si bien que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Comme

$$\|v^3\|_{L^{4/3}(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(x)|^{3\frac{4}{3}}\right)^{3/4} = \|v\|_{L^4(\Omega)}^3,$$

on obtient

$$\left|\int_\Omega v^3(x)w(x)dx\right| \leq \|v\|_{L^4(\Omega)}^3\|w\|_{L^4(\Omega)}.$$

On déduit de l'injection de Sobolev que, pour tout $v, w \in V$,

$$|L(w)| \leq \|v\|_{L^4(\Omega)}^3\|w\|_{L^4(\Omega)} \leq (\sigma_\Omega^4\|v\|_V^3)\|w\|_V,$$

ce qui montre la continuité de l'application linéaire L sur V.

3. Montrer que J est différentiable sur V et préciser l'action de sa différentielle.

Correction: On constate que

$$\begin{aligned}
J(v+w) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v(v) + \nabla w(x)|^2 dx + \frac{1}{4}\int_\Omega |v(x)+w(x)|^4 dx \\
&= J(v) + \Big\{\int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx\Big\} \\
&\quad + \Big\{\frac{3}{2}\int_\Omega v^2(x)w^2(x)dx + \int_\Omega v(x)w^3(x)dx + \frac{1}{4}\int_\Omega w^4(x)dx\Big\}.
\end{aligned}$$

L'application linéaire $\tilde{L} : w \ni V \mapsto \int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx \in \mathbb{R}$ est continue sur V de par la question précédente. Il reste à montrer que le dernier terme entre accolades du membre de droite est un $o(\|w\|_V)$. On constate que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega v^2(x)w^2(x)dx &\leq \left(\int_\Omega v^4(x)dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega w^4(x)dx\right)^{1/2} \\
&= \|v\|^2_{L^4(\Omega)}\|w\|^2_{L^4(\Omega)} && \text{(Cauchy–Schwarz)} \\
\int_\Omega v(x)w^3(x)dx &\leq \|v\|_{L^4(\Omega)}\|w\|^3_{L^4(\Omega)} && \text{(Hölder)} \\
\int_\Omega w^4(x)dx &= \|w\|^4_{L^4(\Omega)} && \text{(définition de } \|w\|_{L^4(\Omega)})
\end{aligned}$$

si bien qu'en utilisant l'injection de Sobolev, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|w\|_V}\left\{\frac{3}{2}\int_\Omega v^2(x)w^2(x)dx + \int_\Omega v(x)w^3(x)dx + \frac{1}{4}\int_\Omega w^4(x)dx\right\} \\
&\qquad\qquad \leq \frac{3}{2}\sigma_\Omega^4\|v\|_V^2\|w\|_V + \sigma_\Omega^4\|v\|_V\|w\|_V^2 + \frac{1}{4}\sigma_\Omega^4\|w\|_V^3.
\end{aligned}$$

Comme le majorant tend vers zéro lorsque w tend vers zéro dans V, on en déduit que la fonctionnelle J est bien différentiable sur V et que, pour tout $v, w \in V$,

$$\langle J'(v), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx.$$

4. Montrer qu'il existe un et un seul minimiseur global de J sur V. En déduire l'existence et l'unicité dans $H_0^1(\Omega)$ de la solution du problème (2).

Correction: Les résultats ci-dessus montrent que la fonctionnelle J admet un et un seul minimiseur sur V (c'est la fonction nulle !). On rajoute le terme linéaire $-\int_\Omega f(x)v(x)dx$ à la fonctionnelle J, ce qui donne

$$J_f(v) = J(v) - \int_\Omega f(x)v(x)dx.$$

La fonctionnelle J_f est α-convexe sur V et sa différentielle est telle que, pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$,

$$\langle J_f'(v), w\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla v(x)\cdot\nabla w(x)dx + \int_\Omega v^3(x)w(x)dx - \int_\Omega f(x)w(x)dx.$$

Ainsi, $u \in H_0^1(\Omega)$ est solution du problème (2) si et seulement si $J_f'(u) = 0$ dans V', c'est-à-dire, si et seulement si u est minimiseur global de J_f sur $H_0^1(\Omega)$. Le problème (2) admet donc une et une seule solution.