Cours MAP434, «Contrôle de modèles dynamiques»
Séance 5, 13 mai 2015
COMMANDABILITÉ, MATRICE DE KALMAN

I - Commandabilité On considère le système contrôlé

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x(0) = x_0$$

où $x \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$, A est une matrice $d \times d$, $u \in \mathbb{R}^m$ un contrôle (dépendant du temps) et B une matrice $d \times m$.
1. Etant donné $u(t)$, donner une expression de la solution de cette équation.

Correction: Si $u = 0$ la solution est $x = \exp(tA)x_0$. On pose par conséquent $y = \exp(-tA)x$, qui vérifie $y(0) = x_0$ et

$$\dot{y}(t) = e^{-tA}(-Ax + \dot{x}) = e^{-tA}Bu(t).$$

Donc $y(t) = x_0 + \int_0^t \exp(-sA)Bu(s)ds$ et

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

2. On dit que le système est contrôlable ou commandable si pour tout $T > 0$, pour tous points $x_0, x_T \in \mathbb{R}^d$ on peut trouver $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ qui engendre une trajectoire avec $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_T$. Montrer que si c'est le cas, alors nécessairement le rang de la matrice "de Kalman" $d \times (md)$ $K = [B, AB, \dots, A^{d-1}B]$ est d. (On commencera par vérifier qu'on peut supposer $x(0) = 0$ sans perte de généralité.)

Correction: Supposons le système commandable de 0 à tout x_T ; alors, il existe u qui amène une solution $\tilde{x}(t)$ de 0 en $x_T - \exp(AT)x_0$. Alors $x = \tilde{x} + e^{At}x_0$ est une solution pour ce même u, qui est amenée de x_0 en x_T. On peut donc supposer que $x_0 = 0$ sans perte de généralité.

On fait donc l'hypothèse que pour tout $X_T \in \mathbb{R}^d$ on peut trouver $u(t)$ tel que

$$\int_0^T e^{(T-s)A}Bu(s)ds = X_T.$$

Or le terme de gauche s'écrit aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n B \left(\frac{1}{n!} \int_0^T (T-s)^n u(s)ds \right),$$

l'hypothèse implique donc que la somme des sous-espaces $\mathrm{Im}(A^n B)$, $n \geq 0$, est $\mathbb{R}^d$. Mais on sait que A^d est combinaison des A^l, $0 \leq l \leq d-1$ (car $P_A(A) = 0$, où P_A est le polynôme caractéristique, de degré d). Donc pour tout $n \geq d$, $\mathrm{Im}(A^n B) \subset \sum_{l=0}^{d-1} \mathrm{Im}(A^l B)$. Donc on doit bien avoir que $\sum_{l=0}^{d-1} \mathrm{Im}(A^l B) = \mathbb{R}^d$.

3. On introduit la matrice $d \times d$

$$G_T = \int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA} ds.$$

Montrer que si la matrice G_T est inversible, le système peut être contrôlé.

Correction: C'est élémentaire en cherchant $u(s)$ de la forme ${}^tBe^{(T-s){}^tA}Y$: en effet l'équation à résoudre est alors

$$\int_0^T e^{(T-s)A} B {}^tB e^{(T-s){}^tA} ds Y = G_T Y = X_T.$$

et il suffit de choisir $Y = G_T^{-1} X_T$.

4. Montrer que si la matrice de Kalman K est de rang d, G_T est inversible.

Correction: Si $v \in \ker G_T$,

$${}^tv G_T v = 0 = \int_0^T \|{}^tv e^{(T-s)A} B\|^2 \, ds$$

et par conséquent pour tout s, ${}^tve^{(T-s)A}B = 0$. Soit pour tout $s \in [0, T]$:

$$\sum_{n \geq 0} {}^tv \frac{(T-s)^n}{n!} A^n B = {}^tvB + (T-s) \sum_{n \geq 1} {}^tv \frac{(T-s)^{n-1}}{n!} A^n B = 0.$$

En prenant $s = T$, on voit que ${}^tvB = 0$. En divisant le reste par $T - s$ et en prenant la limite quand $s \to T$ on voit que ${}^tvAB = 0$. Ainsi par récurrence on conclut que ${}^tvA^nB = 0$ pour tout n, donc le rang de K est strictement plus petit que d (l'image de K est orthogonale à v).

5. Montrer que la commande : $\bar{u} : t \mapsto {}^tBe^{(T-s){}^tA}G_T^{-1}X_T$ est optimale parmi les contrôles qui amènent 0 à X_T, pour le cout $u \mapsto \mathcal{E}(u) = \int_0^T \|u(s)\|^2 ds$ (c'est même l'unique commande optimale pour ce cout).

Correction: On a pour tout v

$$\mathcal{E}(\bar{u} + v) = \mathcal{E}(\bar{u}) + \mathcal{E}(v) + 2 \int_0^T {}^tv(s) {}^tB e^{(T-s){}^tA} G_T^{-1} X_T ds.$$

Le terme croisé se réécrit

$$2 \left\langle G_T^{-1} X_T, \int_0^T e^{(T-s)A} B v(s) ds \right\rangle,$$

or si $\bar{u} + v$ définit aussi une trajectoire de 0 à X_T, par linéarité v définit une trajectoire de 0 à 0, ce qui signifie précisément que

$$0 = \int_0^T e^{(T-s)A} B v(s) ds$$

et on conclut bien que $\mathcal{E}(\bar{u}+v) \geq \mathcal{E}(\bar{u})$, avec inégalité stricte pour $v \neq 0$.

6. Que peut-on dire du système $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (x_2, u)$? $(d = 2,\ m = 1)$. De $(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (-u, u)$?

Correction: Dans le premier cas,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et le système est contrôlable. Dans le second cas $A = 0$ et K est de rang 1. Dans ce cas $x_1 + x_2$ est constant et les trajectoires restent sur ces lignes.

7. *Forme de Brunovski.* On suppose que $m = 1$, donc $B \in \mathbb{R}^d$, et que le système est commandable. On note $P_A(X) = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i X^i$ le polynôme caractéristique de A. On veut montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, \dots, e_d)$ dans laquelle le système se réécrit

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{B}u$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7.a Vérifier que si A, B se représentent par $\tilde{A}, \tilde{B}$ dans la base $(e_i)_{i=1}^d$ alors forcément, $B = e_d$ et

$$e_i = Ae_{i+1} + a_i e_d \quad 1 \leq i \leq d. \tag{1}$$

Montrer que si le système est commandable, ces formulent définissent effectivement une base de $\mathbb{R}^d$.

Correction: En effet, $\tilde{B} = \sum_i \tilde{b}_i e_i = e_d$ si $(\tilde{b}_i)_i = (0, \dots, 0, 1)$. Ensuite, on voit que si $i \geq 2$, $Ae_i = e_{i-1} - a_{i-1}e_d$, par conséquent (1) est vraie. Ajoutons qu'on doit aussi avoir $Ae_1 = -a_0 e_d$. On observe alors que si on définit les vecteurs e_i par $e_d = B$ et la formule de récurrence (1), on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\{e_d\} = \mathrm{Vect}\{B\}, \\ &\mathrm{Vect}\{e_{d-1}, e_d\} = \mathrm{Vect}\{AB, B\}, \\ &\mathrm{Vect}\{e_{d-2}, e_{d-1}, e_d\} = \mathrm{Vect}\{A^2B, AB, B\}, \dots, \\ &\mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_d\} = \mathrm{Vect}\{A^{d-1}B, \dots, AB, B\} = \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

si le système est commandable. Dans ce cas, $(e_i)_i$ est bien une base.

7.b En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, vérifier que A, B se représentent bien par $\tilde{A}, \tilde{B}$ dans la base $(e_i)_{i=1}^d$.

Correction: Pour conclure, il faut s'assurer que $Ae_1 = -a_0 e_d$. Par récurrence, on vérifie que $Ae_1 = A^2 e_2 + a_1 A e_d = A^3 e_3 + a_2 A^2 e_d + a_1 A e_d = \cdots = A^d e_d + \sum_{i=1}^{d-1} a_i A^i e_d = P_A(A) e_d - a_0 e_d$. Comme $P_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton), on a bien $Ae_1 = -a_0 e_d$.

8. *Commande par retour d'état et placement des pôles.* On considère une commande de la forme $u = Lx$, $L \in \mathbb{R}^{m \times d}$. Le système a donc la forme

$$\dot{x} = (A + BL)x.$$

Montrer que si le système est commandable, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré d, il existe L tel que les valeurs propres de $A + BL$ sont les racines (réelles ou complexes) de P. On se limitera au cas $m = 1$. En déduire qu'on peut toujours trouver une "commande par retour d'état" $u = Lx$ qui ramène tout point en zéro (en temps infini). On dit alors que le système est *stabilisable*.

Correction: On peut supposer P sous la forme $P(X) = X^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i X^i$. Si $m = 1$, Lx s'écrit $l^t x$ où $l \in \mathbb{R}^d$. Dans la base (e_i) de la question précédente, $A + BL$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 \\ l_1 - a_0 & l_2 - a_1 & \dots & l_d - a_{d-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} \det(sI - A - BL) &= \det \begin{pmatrix} s & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & s & -1 \\ a_0 - l_1 & a_1 - l_2 & \dots & s + a_{d-1} - l_d \end{pmatrix} \\ &= s^d + (a_{d-1} - l_d)s^{d-1} + (a_{d-2} - l_{d-1})s^{d-2} + \cdots + (a_0 - l_1). \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $l_1 = a_0 - c_0$, $l_2 = a_1 - c_1$, etc pour avoir $\det(sI - A - BL) = P(s)$.

Pour ramener tout point en 0 il suffit de choisir l tel que $P(X) = (X+1)^d$ (par exemple) de sorte que $x(t)$ vérifiera $x(t) = x_0 e^{-t} \pi(t)$ où π est un polynôme de degré au plus $d - 1$.

II - Pendule inversé. On veut stabiliser un pendule (dans un plan) autour de son équilibre instable (masse vers le haut, tige vers le bas). La commande est l'accélération horizontale $\ddot{X}$ du point inférieur, qui se déplace le long d'une droite et a pour abscisse X. La dynamique est donnée par

$$lm\ddot{\theta} = mg \sin\theta - um \cos\theta$$

où l est la longueur du pendule, m la masse fixée en $(X + l \sin\theta, l \cos\theta)$, θ l'angle fait avec la verticale.

1. Ecrire l'équation du mouvement comme un système du premier ordre.

Correction: On prend $x = (\dot\theta, \theta)$ comme variable d'état, et on a alors

$$\dot x = \begin{pmatrix} \frac{g}{l}\sin x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\cos x_2}{l} u \\ 0 \end{pmatrix} = f(x,u).$$

2. Linéariser le système autour de l'équilibre vertical $\theta = \dot\theta = 0$ et de la commande $u = 0$. Le système non commandé est-il stable ? Le système linéarisé est-il commandable : peut-on ramener à zéro tout état non-nul ?

Correction: Le point d'équilibre correspondant est $x = 0$. L'équation linéarisée est

$$\dot\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{g}{l} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Pour $u = 0$ le système s'écrit $\dot\xi = A\xi$ et les valeurs propres de A sont $\pm\sqrt{g/l}$: l'équilibre est instable. La matrice de Kalman de ce système linéarisé est

$$K = [B, AB] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} \end{pmatrix}$$

qui a rang 2 : le système est commandable, et on peut ramener à zéro tout état initial.

3. Montrer qu'en choisissant correctement une commande par "retour d'état" (ou feedback) $u = \mathbf{c}\cdot\xi$, où $\xi = (\dot\theta, \theta)$, on peut stabiliser le système linéarisé en $x = 0$.

Correction: En notant $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^t$, l'équation linéarisée devient

$$\dot\xi = \begin{pmatrix} -\frac{c_1}{l} & \frac{g}{l} - \frac{c_2}{l} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi.$$

Les valeurs propres de la matrice sont solutions de

$$X^2 + \frac{c_1}{l} X + \frac{c_2 - g}{l} = 0$$

et on peut évidemment trouver c_1, c_2 tels que ces valeurs propres soient négatives (par exemple, on peut rendre le polynôme égal à $X^2 + 2X + 1 = (X+1)^2$). Dans ce cas, la commande ramène à 0 tout état (en temps infini).

4. Que donne le choix de feedback $\mathbf{c} = (2l, g + l)$ pour le système non-linéaire de départ ?

Correction: On considère le choix précédent $u = \mathbf{c}\dot\xi$ avec $\mathbf{c} = (2l, g+l)$ (de sorte que les v.p. sont -1). Le système non-linéaire s'écrit

$$\dot x = f(x, \mathbf{c}\cdot x) = \begin{pmatrix} -2x_1\cos x_2 - x_2\cos x_2 + \frac{g}{l}(\sin x_2 - x_2\cos x_2) \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Son linéarisé au voisinage de zéro est le système linéarisé de la question précédente, le point zéro est donc stable.

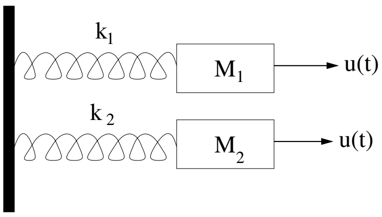
5. On suppose qu'on n'observe que l'angle (θ), et non sa vitesse ($\dot\theta$), et on demande donc que la commande ne dépende que de θ, soit $c_1 = 0$ (en posant $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$). Quels choix de c_2 permettent de stabiliser le système linéaire ?

Correction: L'équation des valeurs propres de la matrice du système linéarisé est alors $X^2 = \frac{g}{l} - \frac{c_2}{l}$. On ne peut plus avoir deux valeurs propres à parties réelles négatives. Si $c_2 < g$, le système est instable (une v.p. positive). Si $c_2 > g$, par exemple $c_2 = g + l$, les valeurs propres sont $\pm i$. Le système s'écrit alors $\dot\xi = (-\xi_2, \xi_1)$ et les solutions sont de la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \xi(0).$$

On s'attend au mieux à pouvoir faire osciller le système linéarisé autour de son point d'équilibre et on ne peut pas conclure pour le système non-linéaire.

III - Deux oscillateurs en parallèle On considère le deux oscillateurs en parallèle :



avec $M_1, M_2 > 0$ et $k_1, k_2 \geq 0$.

Si on pose $\omega_1^2 = k_1/M_1$, $\omega_2^2 = k_2/M_2$, $\alpha_1 = 1/M_1$, $\alpha_2 = 1/M_2$ on obtient

$$\begin{cases} \ddot x_1 = -\omega_1^2 x_1 + \alpha_1 u \\ \ddot x_2 = -\omega_2^2 x_2 + \alpha_2 u, \end{cases}$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$.
1. Pour quelles valeurs des paramètres, le système est-il commandable ?

Correction: If we set $\dot x_1 = y_1$, $\dot x_2 = y_2$ and $x = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ we get the linear control system

$$\dot x = Ax + Bu$$

with

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_1 \\ 0 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

The controllability matrix is

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_1\omega_1^2 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_1\omega_1^2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_2\omega_2^2 \\ \alpha_2 & 0 & -\alpha_2\omega_2^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Its determinant is $\alpha_1^2\alpha_2^2\left(\omega_1^2-\omega_2^2\right)^2$, hence it is controllable iff $\omega_1 \neq \omega_2$.

2. On désire aller de l'équilibre $x_1 = y_1 = x_2 = y_2 = u = 0$ à l'équilibre $x_1 = a\frac{\alpha_1}{\omega_1^2}$, $x_2 = a\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}$, $y_1 = y_2 = 0$, $u = a$. Est-ce toujours possible ? On va donner une méthode générale qui assure un tel transfert en temps fini T. Pour cela on va chercher une fonction z de la forme $c_1x_1 + c_2\dot{x}_1 + c_3x_2 + c_4\dot{x}_2$ avec les c_i des constantes réelles telles que chacun des x_i et $\dot{x}_i$ ainsi que la commande u puisse s'écrire comme combinaison linéaire de z et d'un nombre fini de ses dérivées. Une telle fonction z est appelée une "sortie de Brunowski" associée au système commandé. Montrer que cela est possible si le système est commandable ou si $\omega_1 = \omega_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$. Ensuite résoudre explicitement le problème de transfert défini précédemment.

Correction: Let us write $z = c_1x_1 + c_2y_1 + c_3x_2 + c_4y_2$. We simply take successive derivatives of z and we require that $\dot{z}, \ddot{z}, \dddot{z}$ do not depend on the control. We get :
$c_2\alpha_1 + c_4\alpha_2 = 0$,
$c_1\alpha_1 + c_3\alpha_2 = 0$,
$c_2\alpha_1\omega_1^2 + c_4\alpha_2\omega_2^2 = 0$,

Hence $c_1 = A\alpha_2$ and $c_3 = -A\alpha_1$ where A is a constant different from zero. If we fix $A = 1$ we get

$$\begin{pmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \\ \dddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & -\alpha_1 \\ -\omega_1^2\alpha_2 & 0 & \omega_2^2\alpha_1 & 0 \\ 0 & -\omega_1^2\alpha_2 & 0 & \omega_2^2\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

The control system is then written as
$z^{(4)} = \omega_1^4\alpha_2x_1 - \omega_2^4\alpha_1x_2 + u\alpha_1\alpha_2(-\omega_1^2 + \omega_2^2)$
Defining the second member as a new control v, the control system become

$$z^{(4)} = v.$$

In the old variables we wanted to go from $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (0, 0, 0, 0)$ and $u = 0$ to $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (a\frac{\alpha_1}{\omega_1^2}, 0, a\frac{\alpha_2}{\omega_2^2}, 0)$ and $u = a$. In the new variable we want to go from

$$(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dddot{z}) = (0, 0, 0, 0) \text{ and } v = 0$$

to

$$(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dddot{z}) = \left(a\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right), 0, 0, 0\right) \text{ and } v = 0.$$

It is then possible to find z as a polynomial of degree 9 in t (we have to satisfy 10 conditions). Notice that if the system is controllable then all the transformations are invertible and the transfer between the initial and final conditions is possible. If $\omega_1 = \omega_2$ and $\alpha_1 = \alpha_2$ we get two copies of the same system and boundary conditions and again the transfer is possible.