TP 4 : Polynômes et Fractions rationnelles

Définitions

Une fonction polynôme est une fonction P : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par une expression du type :

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

- Les nombres $a_0,...,a_n$ sont appelés les coefficients de P.
- Si $a_n \neq 0$, n est appelé le degré de P.

Opérations sur les degrés

Soit P et Q deux fonctions polynômes non nulles. Alors :
deg (PQ) = deg P + deg Q
et deg (P + Q) $\leqslant$ sup(deg P, deg Q)
Remarque : l'inégalité stricte est possible, les termes de plus haut degré pouvant s'annuler.

Racine d'une fonction polynôme

Soit P une fonction polynôme de degré n, n $\geqslant$ 1.
Définition :

- Une racine (ou zéro) de P est un nombre a tel que P(a) = 0.
- Déterminer les racines de P, c'est résoudre l'équation P(x) = 0.

Remarque :

a est une racine de P si et seulement s'il existe une fonction polynôme Q telle que pour tout réel x, P(x) = (x - a) Q(x).

- on a alors deg Q = n - 1 ;
- ce théorème permet de réduire le degré d'une équation.

Pour déterminer les racines d’un polynôme : On commence par définir un " vecteur "qui contient les coefficients du polynôme : (par ordre décroissant en degré de x)

Exemple : 3x2 − 5x + 2 = 0

>> p = [3 -5 2]

p=

3 -5 2

>> roots(p)

ans =

1.0000

0.6667

On peut aussi écrire :

>> roots([3 -5 2])

ans =

1.0000

0.6667

Détermination des coefficients d'un polynôme à partir de ses racines

on utilise la fonction ***poly*** pour déterminer les coefficients d'un polynôme à partir de ses racines :

Exemple :

>> a=[1 2]

a=

12

>> poly(a)

ans =

1 -3 2

c'est-à-dire que le polynôme cherché est : x2 − 3x + 2

Produit des polynômes

Pour calculer le produit des polynômes, on utilise la fonction ***conv***

Exemple : $(x - 2)(x - 1) = ?$

>> p1=[1 -1]; p2=[1 -2];

>> P=conv(p1,p2)

P=

1 -3 2

Autrement dit : $(x - 2)(x - 1) = x2 - 3x + 2$

Remarque : la fonction conv possède uniquement deux paramètres d'entrée.

Division de deux polynômes

On utilise la commande ***deconv***. On écrit les instructions suivantes:

```
a = [1 2 3 4];

b = [1 4 9 16];

c = [1    6    20    50    75    84    64];

[q,r] = deconv(c,b)
```

On obtient comme résultat:

q =

1 2 3 4 :représente le quotient de la division

r =

0 0 0 0 0 0 :représente le reste de la division

Fractions rationnelles : Décomposition en éléments simples

La décomposition en fractions partielles ou en éléments simples d'une fraction rationnelle est son expression sous une somme de fractions ayant pour dénominateurs des puissances de polynômes irréductibles et pour numérateurs un polynôme de degré inférieur au polynôme irréductible du dénominateur. Cette décomposition est utilisée dans le calcul intégral pour faciliter la recherche des primitives de la fonction rationnelle associée.

$$\frac{n(x)}{d(x)} = \frac{r_1}{x - p_1} + \frac{r_2}{x - p_2} + \ldots + k(x)$$

p_1 , p_2 … désignent les " pôles ".

Exemple :

$$\frac{6}{x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x} = ?$$

polynôme du numérateur :

```
>> n =[ 6 ]

n =

6
```

polynôme du dénominateur :

```
>> d =[ 1 6 11 6 0 ]

d =

1 6 11 6 0
```

La fonction ***residue*** permet de décomposer une fraction rationnelle en éléments simples. :

```
>> [ r , p , k ] = residue ( n , d)

r =

-1.0000

3.0000

-3.0000

1.0000

p =
```

-3.0000

-2.0000

-1.0000

0

k =

[ ]

Donc, on a : $$\frac{6}{x^4+6x^3+11x^2+6x} = \frac{-1}{x+3} + \frac{3}{x+2} + \frac{-3}{x+1} + \frac{1}{x}$$

Valeur d'un polynôme en un point

Y = f (x) = $3x^2 - 5x + 2$

>> p = [3 -5 2]

p=

3 -5 2

Calcul de f(x = 1) ?

>> polyval(p , 1)

ans=

0

Représentation graphique

>>x = linspace(-1,3,100)

>> p = [1 4 -7 -10]

>> v = polyval(p,x)

>>plot(x,v), title('courbe du v')

Taper grid.

Utilisation de la fonction *fplot*

```
>> fplot ( '3*x^2 - 5*x + 2' , [ 0 2 ] )
>> grid
```

Exercices

Exercice 1 :

1/ Déterminer les racines de :

a/ $x^2 - 4x + 4 = 0$

b/ $x^2 + 3x + 8 = 0$

c/ $x^5 + 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 3x + 5 = 0$

d/ Polynôme à coefficients complexes : $(1 + i)x^2 + (2 - 5i)x + 3.5 = 0$

2/ Déterminer les coefficients de polynôme Q si les les racines de Q sont : [2 2 3 -5]

3/ Déterminer : $(x^2 - 2x^2 + 3)(x^3 + 4x^2 + x)(x + 5) =?$

4/ Soit $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$, calculer f(6)

Exercice 2

1/ Déterminer le polynôme e(x) somme des polynômes c(x) et d(x).

$c(x) = x^2 - 2x - 7$

$d(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4$

Attention : ces deux polynômes sont d'ordres différents.

2/ On donne les polynômes :

$a(x) = x^2 + 2x + 3$

$v(x) = x^4 + 5x^2 + 6$

– Faire le produit de ces deux polynômes. Soit c(x) le polynôme obtenu.

– À partir de c(x), retrouver les polynômes a(x) et v(x).

Exercice 3

– Entrer les polynômes : $p = 2x^5 - x^2 + 5$

$q = x^2 + 1$

– Calculer les racines de p et q.

– Calculer le produit p.q.

– Calculer le quotient et le reste de p par q.

– Calculer les valeurs de p en 0 et -1.

– Tracer la courbe d'équation y = p(x) sur [-10, 10].

Exercice 4

Écrire le polynôme : $P(x) = x^3 - 8x^2 - 32x - 13$

– Calculer de p(2).

– Calculer de p(π).

– calculer les racines du polynôme.

On pose : $q(x) = 4x^2 + 3$

– Calculer p(x)q(x).

– Calculer p(x)/q(x).

– obtenir le graphe de p(x) sur l'intervalle [-5, 12] avec un pas de 0,01.

```
x = -5 : 0.01 : 12
plot(x,polyval(p,x))
```