Cours d'algèbre

Licence appliquée

ISET Jerba

http://www.isetjb.rnu.tn

Haj Dahmane DHAFER

hajdahmaned@yahoo.fr

21 mars 2014

Table des matières

I Généralités sur les matrices **1**

I Définitions et notations 1

II Opérations sur les matrices 3

II.1 Somme de deux matrices 3

II.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire 8

II.3 Produit de deux matrices 13

III Transposée d'une matrice 25

IV Série d'exercices 28

II Matrices Carrées **31**

I Déterminant d'une matrice carrée 31

I.1 Déterminant d'une matrice carrée d'ordre $n \leqslant 2$ 31

I.2 Déterminant d'une matrice d'ordre $n > 2$ 32

I.3 Les propriétés des déterminants 39

II Matrices carrées inversibles 45

III Méthode de Gauss 49

IV Série d'exercices 50

III Systèmes d'équations linéaires **54**

I Définitions 54

II Méthodes de résolutions 56

II.1 Méthode d'élimination substitution 56

II.2 Méthode de Pivot 57

II.3 Méthode de la matrice inverse 57

II.4 Méthode de Cramer 58

III Série d'exercices 61

IV Nombres complexes (rappels) **63**

I Introduction 63

II Règles de calculs dans $\mathbb{C}$ 63

III Interprétation géométrique d'un nombre complexe 64

IV Nombres complexes conjugués 64
V Module d'un nombre complexe 65
VI Forme trigonométrique d'un nombre complexe 65
VII Racines $n^{\text{ièmme}}$ d'un nombre complexe 69
VIII Equations dans $\mathbb{C}$ 71
IX Série d'exercices 72

V Polynômes **74**
I Généralités 74
II Division euclidienne 79
III PPCM, PGCD de deux polynômes 82
IV Polynômes irréductibles : 85
V Racines d'un polynôme 86
VI Algorithmes 90
VI.1 Algorithme de Horner 90
VI.2 Exponentiation rapide 91
VII Série d'éxercices 92

VI Fractions rationnelles **94**
I Généralités 94
I.1 Définitions et règles de calcul 94
I.2 Degré d'une fraction rationnelle 95
II Racines et pôles d'une fraction rationelle 96
III Décomposition en éléments simples 97
III.1 Partie entière d'une fraction rationnelle 97
III.2 Partie polaire d'une fraction rationnelle 98
III.3 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(x)$ 102
III.4 Méthodes pratiques 103
III.5 Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(x)$ 105
IV Série d'exercices 107

VII – Introduction a l'algèbre linéaire **110**
I Espaces vectoriels et applications linéaires 114
II Espaces vectoriels de dimension fini 116
III Matrice d'une application linéaire 116
IV Série d'exercices 117

Bibliographie **119**

Index **121**

«***On n'enseigne pas ce que l'on sait, on enseigne ce que l'on est***»

Jean Jaurès

Dhafer Haj Dahmane
hajdahmaned@yahoo.fr

Chapitre I

Généralités sur les matrices

Sommaire

I Définitions et notations 1

II Opérations sur les matrices 3

II.1 Somme de deux matrices 3

II.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire 8

II.3 Produit de deux matrices 13

III Transposée d'une matrice 25

IV Série d'exercices 28

Dans tout ce chapitre, n et p sont des entiers naturels non nuls et $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

I Définitions et notations

Définition 1

Une **matrice** de **dimension** (n, p) est un tableau rectangulaire de nombres comportant n lignes et p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients de la matrice.
Lorsque $n = p$, on dit que la matrice et une **matrice carrée d'ordre** n.

Remarque

*Une matrice sera représentée par une lettre **majuscule**, **la même lettre en miniscule** sera utilisée pour désigner les coefficients de cette matrice.*

Exemple 1

Si A est une matrice de n lignes et p colonnes alors pour tout $1 \leq i,\ j \leq n$ on désigne par a_{ij} (la même lettre en miniscule) l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne et $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

Notations :

1. L'ensemble des matrices de dimension (n, p) à coefficient dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

2. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $M_n(\mathbb{K})$.

Exemple 2

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ -\dfrac{1}{3} & \pi \\ 2 & 113 \end{pmatrix}$

   ✓ M est une matrice de 3 lignes et 2 colonnes à coefficients réels donc M est un élément de $M_{(3,2)}(\mathbb{R})$

   ✓ M est une matrice de 3 lignes et 2 colonnes alors on dit que M est une matrice de **dimension** $(3,2)$.

   ✓ m_{12} est l'élément de la $1^{\text{ère}}$ ligne et $2^{\text{ième}}$ colonne de M donc $m_{12} = \sqrt{2}$.

   ✓ m_{21} est l'élément de la $2^{\text{ième}}$ ligne et $1^{\text{ière}}$ colonne de M alors $m_{21} = -\dfrac{1}{3}$.

   ✓ m_{32} est l'élément de la $3^{\text{ième}}$ ligne et $2^{\text{ième}}$ colonne de M d'où $m_{32} = 113$.

   ✓ M est une matrice de 3 lignes et de 2 colonnes donc M_{23} n'existe pas.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} -1+2i & 100 \\ 0 & 2-6i \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   ✓ A est une matrice **carrée d'ordre** 2 à coefficients complexes alors $A \in M_2(\mathbb{C})$.

   ✓ $a_{11} = -1+2i$, $a_{12} = 100$, $a_{21} = 0$ et $a_{22} = 2-6i$.

   ✓ N est une matrice **carrée d'ordre** 3.

3. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

   B est une matrice d'une seule ligne et 4 colonnes. On dit que B est une matrice ligne ou "vecteur ligne".

   B est de **dimension** $(1,4)$ et ses coefficients sont réels donc $B \in M_{(1,4)}(\mathbb{R})$.

4. Soit $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2+5i \end{pmatrix}$.

   C est une matrice de 2 lignes et 1 colonne $\Longrightarrow C \in M_{(2,1)}(\mathbb{C})$. On dit que C est une matrice colonne ou "vecteur colonne".

   C est une matrice de **dimension** $(2,1)$.

Remarques

- *Toute matrice A de n lignes et p colonnes s'écrit*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & a_{ij} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- *Pour i, j indices "génériques", on appelle a_{ij} le terme général de A et on note*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

- *Le premier indice désigne, toujours, le numéro de la ligne et le second celui de la colonne.*

- *S'il y a un risque de confondre les numéros, on les sépare par un "," et on écrit $a_{i,j}$ au lieu de a_{ij}. On écrit, par exemple $a_{3,12}$ et non pas a_{312}.*

Définition 2
Deux matrices A et B sont égales si

(i) elles ont la même dimension (n, p)

(ii) $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et pour tout $1 \leq j \leq p$.

On note dans ce cas $A = B$.

Exemple 3

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 24 \\ \sqrt{5} & \pi & -\frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= 0 \\ c &= 24 \\ d &= \sqrt{5} \\ e &= \pi \\ f &= -\frac{6}{5} \end{cases}$$

2. Soient $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   A et B n'ont pas la même dimension donc $A \neq B$.

II Opérations sur les matrices

II.1 Somme de deux matrices

Définition 3
Soient A et B deux matrices **de même dimension** (n, p). On appelle matrice somme de A et B, et on note $A + B$, la matrice C de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$c_{i,j} = a_{ij} + b_{ij}; \qquad \forall 1 \leq i \leq n \text{ et } \forall 1 \leq j \leq p.$$

$$\left.\begin{array}{l} A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \\ \\ B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}\right\} \Longrightarrow A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple 4

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 3+7 \\ 2+2 & -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & -1 & 15 & -12 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 125 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

$$M+N = \begin{pmatrix} 0 & 7 & \sqrt{5}-1 & 125 \\ 3 & 1 & 12 & -7 \end{pmatrix}$$

3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   E et F n'ont pas la même dimension donc $E+F$ n'est pas définie (i.e la matrice somme $E+F$ n'existe pas).

Attention :
L'addition de deux matrices n'est possible qu'à condition que les deux matrices appartiennent toutes deux au même ensemble. Sinon, la somme n'existe pas !

Définition 4
On appelle matrice nulle de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ l'élément de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Remarque
La matrice nulle sera représentée par 0 et on doit distinguer, à partir des expressions, entre la matrice nulle et le nombre zéro.

Exemple 5

1. La matrice nulle de $M_2(\mathbb{K})$ est $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. La matrice nulle de $M_{(2,3)}(\mathbb{K})$ est $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. La matrice nulle de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est $0 = \left.\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}^{\text{p colonnes}}\right\}\text{n lignes}$

Définition 5

Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$. On appelle matrice opposée de A la matrice $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$

Exemple 6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. $\quad -A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient A, B et C trois matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

1. $A + B \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
   $\Longrightarrow$ l'addition dans l'ensemble $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est associative.
3. $A + B = B + A$.
   $\Longrightarrow$ l'addition dans l'ensemble $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est commutative.
4. $A + (-A) = -A + A = 0$. (ici $0 =$ matrice nulle).
5. $A + 0 = 0 + A = A$.
   $\Longrightarrow$ La matrice nulle est un élément neutre de l'addition dans $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$. On démontre que 0 est l'unique élément neutre de l'addition dans $M_n(\mathbb{K})$

Preuve

A, B et C sont trois matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ donc elles peuvent être représenter de la façon suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix}$$

1. Par définition même.
2. Soit $M = A + (B + C)$ et $N = (A + B) + C$. D'après 1. on a M, $N \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ donc

M et N ont la même dimension. De plus

$$\begin{aligned}
A+(B+C) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p}+c_{1p} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n}+c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1}+c_{n1} & a_{n2}+b_{n2}+c_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np}+c_{np} \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \right] \\
&\quad + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{np} \end{pmatrix} \\
&= (A+B)+C
\end{aligned}$$

autrement on peut écrire :
$\forall\ 1 \leq i \leq n$ et $\forall\ 1 \leq j \leq p$ on a :

$$\begin{aligned}
m_{ij} &= a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}) \\
&= (a_{ij}+b_{ij})+c_{ij} \text{ car l'addition dans } \mathbb{K} \text{ est associative} \\
&= n_{ij}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $M = N$.

3. Soit $E = A+B$ et $F = B+A$. Il est claire que E et F ont la même dimension. $\forall\ 1 \leq i \leq n$ et $\forall\ 1 \leq j \leq p$

$$\begin{aligned}
e_{ij} &= a_{ij}+b_{ij} \\
&= b_{ij}+a_{ij} \text{ car l'addition dans } \mathbb{K} \text{ est commutative} \\
&= f_{ij}
\end{aligned}$$

d'où $E = F$

autrement on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\
&= B + A.
\end{aligned}$$

4. Soit $P = A + (-A)$. $\forall\ 1 \leq i \leq n$ et $\forall\ 1 \leq j \leq p$ on a :

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= a_{ij} + (-a_{ij}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc P est la matrice nulle. De même on démontre que $-A + A = 0$.

autrement on peut écrire :

$$\begin{aligned}
A + (-A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1p} \\ -a_{21} & -a_{22} & \dots & -a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & -a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & \dots & a_{1p}-a_{1p} \\ a_{21}-a_{21} & a_{22}-a_{22} & \dots & a_{2p}-a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n1} & a_{n2}-a_{n2} & \dots & a_{np}-a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5. Soit $Q = A + 0$. $\forall\ 1 \leq i \leq n$ et $\forall\ 1 \leq j \leq p$

$$q_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}$$

donc $Q = A$ et de même on démontre que $0 + A = A$.

ou autrement :

$$\begin{aligned} A + 0 &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

■

Remarque

On définit la soustraction dans l'ensemble $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ par : $A - B = A + (-B)$

II.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 6

Soient $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle matrice produit de A par λ la matrice B de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \qquad \forall 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant p$$

On note cette matrice par $\lambda \times A$ ou simplement λA

$$\left.\begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

Exemple 7

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

$$-5A = \begin{pmatrix} -5 \times 1 & -5 \times (-2) \\ -5 \times (-1) & -5 \times 4 \\ -5 \times 2 & -5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 5 & -20 \\ -10 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \times 1 & \frac{1}{3} \times (-2) \\ \frac{1}{3} \times (-1) & \frac{1}{3} \times 4 \\ \frac{1}{3} \times 2 & \frac{1}{3} \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

Le scalaire s'écrit toujours à gauche de la matrice. Ainsi on écrit $5A$ *mais surtout pas* $A5$ *!*
De même on écrit $\frac{1}{3}A$ *mais jamais* $\frac{A}{3}$

Propriétés

Soient deux matrices A et B de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et deux ombres λ et μ (réels ou complexes).

1. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
3. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
4. $1.A = A$.
5. $\underset{\text{0 de } \mathbb{K}}{0} .A = \underset{\text{matrice nulle}}{0}$

Preuve

Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

1.

$$\begin{aligned}
\lambda(A+B) &= \lambda\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}\right] \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\lambda b_{11} & \lambda a_{12}+\lambda b_{12} & \dots & \lambda a_{1p}+\lambda b_{1p} \\ \lambda a_{21}+\lambda b_{21} & \lambda a_{22}+\lambda b_{22} & \dots & \lambda a_{2n}+\lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1}+\lambda b_{n1} & \lambda a_{n2}+\lambda b_{n2} & \dots & \lambda a_{np}+\lambda b_{np} \end{pmatrix} \\
&= \lambda A + \lambda B.
\end{aligned}$$

On peut aussi démontrer cette propriété de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\lambda(A+B) &= \lambda(a_{ij}+b_{ij}) \\
&= (\lambda a_{ij}+\lambda b_{ij}) \\
&= \lambda A + \lambda B
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)A &= (\lambda+\mu)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_{11}+\mu a_{11} & \lambda a_{12}+\mu a_{12} & \dots & \lambda a_{1p}+\mu a_{1p} \\ \lambda a_{21}+\mu a_{21} & \lambda a_{22}+\mu a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}+\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1}+\mu a_{n1} & \lambda a_{n2}+\mu a_{n2} & \dots & \lambda a_{np}+\mu a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \lambda A + \mu A
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu A) &= \lambda \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \dots & \mu a_{1p} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \dots & \mu a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu a_{n1} & \mu a_{n2} & \dots & \mu a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda\mu a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda\mu a_{1p} \\ \lambda\mu a_{21} & \lambda\mu a_{22} & \dots & \lambda\mu a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\mu a_{n1} & \lambda\mu a_{n2} & \dots & \lambda\mu a_{np} \end{pmatrix} \\
&= (\lambda\mu)A
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
1.A &= 1 \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
0.A &= 0 \times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Exercice 1

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 65 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $3A - 2B$.
2. Trouver la matrice C tel que $2A + C = B$

Solution :

1.

$$\begin{aligned} 3A - 2B &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 6 & 9 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 10 & 6 & 130 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -4 & 3 & 3\sqrt{2} - 130 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 2A + C = B \Leftrightarrow C &= B - 2A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 3 & 65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 65 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

II.3 Produit de deux matrices

Définition 7

Soient $A \in M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{(m,p)}(\mathbb{K})$. On appelle produit AB la matrice C de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \tag{1.1}$$

Le produit AB se note aussi $A \times B$

Remarques

1. *Dans le calcule de c_{ij} interviennent les coefficients de la $i^{ème}$ ligne de A et les coefficients de la $j^{ème}$ colonne de B ce que l'on peut visualiser de la façon suivante :*

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kj} & \cdots & b_{km} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \\ & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & \boxed{c_{ij}} & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + a_{i3} \times b_{3j} + \cdots + a_{im} \times b_{mj}$$

2. *La matrice produit AB n'est définie que si le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.*

Exemple 8

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -7 & 9 \end{pmatrix}$

   (a) Soit $C = AB$. D'après l'équation (1.1) de la définition (7) on a :

✓ Pour $i = j = 1$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k1} \\ &= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} \\ &= 2 \times 5 + 3 \times (-7) \\ &= -11 \end{aligned} \tag{1.2}$$

On remarque, a partir de l'équation (1.2), que pour calculer c_{11} il suffit de considérer la première ligne de A (première matrice) et la première colonne de B (deuxième matrice)

$$\boxed{2 \quad 3} \ \textit{et} \ \boxed{\begin{matrix} 5 \\ -7 \end{matrix}}$$

et de calculer $2 \times 5 + 3 \times (-7)$

✓ Pour $i = 1$ *et* $j = 2$

$$\begin{aligned} c_{12} &= \sum_{k=1}^{2} a_{1k} b_{k2} \\ &= a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ &= 2 \times 6 + 3 \times 9 \\ &= 39 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Donc, à partir de l'équation (1.3) on remarque que pour calculer c_{12} il suffit de considérer la première ligne de A (première matrice) et la deuxième colonne de B (deuxième matrice).

$$\boxed{2 \quad 3} \ \textit{et} \ \boxed{\begin{matrix} 6 \\ 9 \end{matrix}}$$

et de calculer $2 \times 6 + 3 \times 9$

✓ Pour calculer c_{21} on considère la deuxième linge de A et la première colonne de B.

$$\boxed{-1 \quad 4} \ \textit{et} \ \boxed{\begin{matrix} 5 \\ -7 \end{matrix}}$$

$$c_{21} = -1 \times 5 + 4 \times (-7) = -33$$

✓ Pour calculer c_{22} on considère la deuxième linge de A et la deuxième colonne de B.

$$\boxed{\textit{-1} \quad \textit{4}} \; \textit{et} \; \boxed{\begin{matrix} \textit{6} \\ \textit{9} \end{matrix}}$$

$$c_{22} = -1 \times 6 + 4 \times 9 = 30$$

Par conséquent $AB = \begin{pmatrix} -11 & 39 \\ -33 & 30 \end{pmatrix}$

(b) Calculons BA!

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \boxed{\textit{5} \quad \textit{6}} \\ \boxed{\textit{-7} \quad \textit{9}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \textit{2} \\ \textit{-1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \textit{3} \\ \textit{4} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 6 \times (-1) & 5 \times 3 + 6 \times 4 \\ -7 \times 2 + 9 \times (-1) & -7 \times 3 + 9 \times 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 39 \\ -23 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il est bien claire que dans ce cas on a $AB \neq BA$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

(a) $A \in M_{(2,3)}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{(3,2)}(\mathbb{K})$ donc la matrice produit AB existe (car le nombre de colonne de A = nombre de ligne de B). De plus $AB \in M_{(2,2)}(\mathbb{K}) = M_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} \boxed{\textit{1} \quad \textit{2} \quad \textit{-3}} \\ \boxed{\textit{0} \quad \textit{3} \quad \textit{1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \textit{6} \\ \textit{4} \\ \textit{-3} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \textit{7} \\ \textit{5} \\ \textit{0} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 6 + 2 \times 4 + (-3) \times (-3) & 1 \times 7 + 2 \times 5 + (-3) \times 0 \\ 0 \times 6 + 3 \times 4 + 1 \times (-3) & 0 \times 7 + 3 \times 5 + 1 \times 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 23 & 17 \\ 9 & 15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(b) $B \in M_{(3,2)}(\mathbb{K})$ et $A \in M_{(2,3)}(\mathbb{K})$ donc la matrice produit BA existe (car B est une matrice de deux colonnes et A est une matrice de deux lignes). De plus $BA \in M_{(3,3)}(\mathbb{K}) = M_3(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 4 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boxed{\mathit{6} \quad \mathit{7}} \\ \boxed{\mathit{4} \quad \mathit{5}} \\ \boxed{\mathit{-3} \quad \mathit{0}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathit{1} \\ \mathit{0} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \mathit{2} \\ \mathit{3} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \mathit{-3} \\ \mathit{1} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6+0 & 12+21 & -18+7 \\ 4+0 & 8+15 & -12+5 \\ -3+0 & -6+0 & 9+0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 33 & -11 \\ 4 & 23 & -7 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) A est une matrice de quatre colonnes et B est une matrice de deux lignes donc AB n'est pas définie.

(b) $B \in M_{(2,2)}(\mathbb{K})$ et $A \in M_{(2,4)}(\mathbb{K})$ donc la matrice produit BA existe (car B est une matrice de deux colonnes et A est une matrice de deux lignes). De plus $BA \in M_{(2,4)}(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ *si* BA *existe,* AB *n'existe pas forcément.*

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pourtant, $A \neq 0$ et $B \neq 0$ on a : $AB = 0!$ donc si A et B sont deux matrices qui vérifient $AB = 0 \nRightarrow (A = 0$ où $B = 0)$.

Attention :

Si A et B sont des matrices alors :

1. On ne peut calculer AB que quand le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
2. Si AB est définie, BA n'est pas toujours définie.
3. Si AB et BA sont définies, elled n'ont pas en général la même dimension.
4. La matrice AB, si elle existe, possède le nombre de lignes de la première matrice (ici A) et le nombre de colonnes de la deuxième (ici B).
5. Dans $M_n(\mathbb{K})$, ensemble des matrices carrées d'ordre n, on peut toujours multiplier deux matrices A, B quelconques. AB et BA seront encore des matrices carrées d'ordre n mais en général $AB \neq BA$
6. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.

Définition 8

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est une matrice triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j > i$.
2. On dit que A est une matrice triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j < i$.
3. On dit que A est une matrice diagonale si $a_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$.

Définition 9

Pour $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle termes diagonaux de A les termes

$$a_{11},\ a_{22},\ \cdots,\ a_{nn}$$

c'est à dire a_{ii} avec $1 \leqslant i \leqslant n$

Exemple 9

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -11 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

   1, 2 et -11 sont les éléments diagonaux de A.

2. $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 11 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

   5, -1, 0 et -7 sont les éléments de la diagonale de B.

3. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ sont deux matrices diagonales.

   -1, 5 sont les éléments de la diagonale de D.

   Les éléments 1, 0 et -4 forment la diagonale de C.

Remarques

On peut aussi donner les définitions suivantes :

1. *On dit qu'une matrice carrée est **diagonale** si ses termes **non diagonaux** sont nuls.*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

2. *On dit qu'une matrice carrée est **triangulaire supérieure** si ses termes strictement **au-dessous de la diagonale principale sont nuls**.*

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

3. *On dit qu'une matrice carrée est **triangulaire inférieure** si ses termes strictement **au-dessus la diagonale principale sont nuls**.*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix}$$

*où * représente n'importe quel scalaire (évidement « * » peut être nul).*

On pose, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Définition 10

La matrice $I_n = (\delta_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ est appelée **matrice unité** ou matrice **identité** d'ordre n.

Exemple 10

1. La matrice unité de d'ordre 2 est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. La matrice identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. D'une façon plus générale : La matrice unité (ou identité) d'ordre n s'écrit

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A \times I_3 = I_2 \times A = A$

Remarque
S'il n'y a pas de risque de confusion, la matrice I_n sera notée simplement par I.

Propriétés

1. *Pour toutes matrices A de $M_{(n,m)}(\mathbb{K})$, B de $M_{(m,k)}(\mathbb{K})$ et C de $M_{(k,p)}(\mathbb{K})$ on a :*

$$A(BC) = (AB)C.$$

2. **(a)** *Pour toute matrice $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ on a :*

$$AI_p = A.$$

   (b) *Pour toute matrice $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ on a :*

$$I_nA = A$$

   (c) *En particulier si $n = p$ on a : $AI = IA = A$.*
   $\Longrightarrow$ *I est l'élément neutre de la multiplication des matrices dans $M_n(\mathbb{K})$.*

3. *Pour toutes matrices A de $M_{(n,m)}(\mathbb{K})$, B et C de $M_{(m,p)}(\mathbb{K})$ on a :*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

4. *Pour toutes matrices A de $M_{(m,p)}(\mathbb{K})$, B et C de $M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ on a :*

$$(B + C)A = BA + CA.$$

5. *Pour toutes matrices A de $M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ et B de $M_{(m,p)}(\mathbb{K})$ et pour tous nombres (réels ou complexes) α, β on a :*
$$(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)AB.$$

Preuve

1. Il est bien claire que $A(BC)$ et $(AB)C$ sont deux matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.
Soient α_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $A(BC)$ et β_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $(AB)C$.
$$\alpha_{ij} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}(bc)_{lj}$$
où $(bc)_{lj}$ désigne l'élément de la $l^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de BC or
$$(bc)_{lj} = \sum_{q=1}^{k} b_{lq}c_{qj}$$
donc
$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \sum_{l=1}^{m} a_{il} \sum_{q=1}^{k} b_{lq}c_{qj} \\ &= \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{k} a_{il}b_{lq}c_{qj} \\ &= \sum_{q=1}^{k}\left(\sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lq}\right)c_{qj} \\ &= \sum_{q=1}^{k}(ab)_{iq}c_{qj} \\ & \quad (ab)_{iq} \text{ désigne l'élément de la } i^{ime} \text{ ligne } q^{ime} \text{ colonne de } AB \\ &= \beta_{ij} \end{aligned}$$

2. **(a)**

$$\begin{aligned} AI_p &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \\ &= A. \end{aligned}$$

   (b) Même démonstration que (a).

   (c) Il suffit d'appliquer (a) et (b) pour $n = p$.

3. $A(B+C)$ et $AB+AC$ sont deux matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$. Soient α_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $A(B+C)$ et β_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $AB+AC$.

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + ckj) \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}ckj \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}ckj \\ &= \beta_{ij}. \end{aligned}$$

4. même démonstration que 3.

5. $(\alpha A)(\beta B)$ et $(\alpha\beta)AB$ sont deux matrices de $M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.
   Soient α_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $(\alpha A)(\beta B)$ et β_{ij} l'élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne $j^{\text{ième}}$ colonne de $(\alpha\beta)AB$

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} (\alpha a_{ik})(\beta b_{kj}) \\ &= \alpha\beta \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} \\ &= \beta_{ij}. \end{aligned}$$

■

Attention :

Si A, B et C sont des matrices alors :

1. $AB + CA \neq A(B + C)$
2. $AB + CA \neq (B + C)A$

En effet,

$A(B + C) = AB + AC$, comme le produit n'est pas commutatif alors $AC \neq CA$.

Par conséquent

$$AB + CA \neq A(B + C)$$

de même

$$\begin{aligned}(B + C)A &= BA + CA \\ &\neq AB + CA\end{aligned}$$

car $AB \neq BA$

Définition 11

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et p un entier naturel strictement supérieur à 1. On appelle A puissance p (où A exposant p) la matrice

$$A^p = \underbrace{A \times A \times \ldots A}_{P \text{ facteurs}}$$

Convention Pour toute matrice carrée A

- ⋆ $A^1 = A$.
- ⋆ Si $A \neq 0$, $A^0 = I_n$

Exemple 11

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
   - $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
   - $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$
   - $A^3 = A^2.A = A.A^2 = \begin{pmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   - $B^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   - $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque

On a déjà remarqué que la multiplication dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n n'est pas une loi commutative, cependant l'associativité du produit nous permet de conclure que :

$$\forall\, A \in M_n(\mathbb{K}); \qquad A^3 = AA^2 = A^2.A$$

En effet,

$$A^3 = A \times A \times A$$

comme le produit est aasociatif alors,

$$A \times A \times A = (A \times A) \times A = A \times (A \times A)$$

Il en résulte que

$$A^3 = A^2 \times A = A \times A^2$$

Définition 12

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$.

1. *On dit que les matrices A et B commutent (on dit aussi permutent) si $AB = BA$.*
2. *On dit que les matrices A et B ne commutent pas (ou ne permutent pas) si $AB \neq BA$.*

Exercice 3

(I) Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que les matrices A et B ne commutent pas.
2. Calculer $A+B$, $A-B$, A^2, AB, B^2, $(A+B)^2$, $(A-B)^2$, $(A-B)(A+B)$, A^2-B^2, $A^2+2AB+B^2$ et $A^2-2AB+B^2$.
3. Comparer
   (a) $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$.
   (b) $(A-B)^2$ et $A^2-2AB+B^2$

(c) $(A-B)(A+B)$ et A^2-B^2

(II) Soient $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que les matrices A et B commutent.
2. Comparer
   - **(a)** $(A+B)^2$ et $A^2+2AB+B^2$.
   - **(b)** $(A-B)^2$ et $A^2-2AB+B^2$
   - **(c)** $(A-B)(A+B)$ et A^2-B^2

(III) Expliquer ces résultats.

Conclusion :

A partir de l'exercice (3) on peut déduire que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ on a :

1. Si A et B ne commutent pas alors
   - **(a)** $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$.
   - **(b)** $(A-B)^2 \neq A^2-2AB+B^2$
   - **(c)** $(A-B)(A+B) \neq A^2-B^2$
2. Si A et B commutent alors
   - **(a)** $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$.
   - **(b)** $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$
   - **(c)** $(A-B)(A+B) = A^2-B^2$

Attention :
On ne peut utiliser les identités remarquables que lorsque les matrices commutent.

Théorème 1 (Binôme de Newton)

*$A,\ B \in M_p(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}$. **Si** A **et** B **commutent** alors*

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k} B^k$$

avec, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

III Transposée d'une matrice

Définition 13

Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ on appelle matrice transposée de A la matrice B de $M_{(p,n)}(\mathbb{K})$ qui vérifie

$$b_{ij} = a_{ji} \qquad \forall 1 \leq i \leq p \text{ et } 1 \leq j \leq n.$$

La matrice transposée de A est notée ${}^tA$ ou ${}^TA$.

Remarques

Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$

1. *A est une matrice à n lignes et p colonnes $\Longrightarrow$ ${}^tA$ est une matrice à p lignes et n colonnes.*
2. *Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$; la i-ième **ligne** de A devient la i-ème **colonne** de ${}^tA$. De même, Pour tout $1 \leqslant j \leqslant p$; la j-ième **colonne** de A devient la j-ème **ligne** de ${}^tA$.*

Exemple 12

1. $A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad 5 \quad 3} \\ \boxed{2 \quad 4 \quad 6} \end{pmatrix}$ $A \in M_{(2,3)}(\mathbb{R})$ donc ${}^tA = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{matrix}} \end{pmatrix} \in M_{(3,2)}(\mathbb{R})$
2. Soit $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \text{2-i} \\ 3 \\ 12+3\text{i} \end{matrix}} \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} \boxed{\text{2-i} \quad 3 \quad 12+3\text{i}} \end{pmatrix}$

Propriétés

Soient $A \in M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{(m,p)}(\mathbb{K})$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^tA \in M_{(m,n)}(\mathbb{K})$
2. ${}^t({}^tA) = A$
3. ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$
4. ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
5. ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$.

Preuve

1. Par définition on a si $A \in M_{(n,m)}(\mathbb{K})$ alors ${}^tA \in M_{(m,p)(\mathbb{K})}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ d'où

$${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = A.$$

3. Il est claire que $AB \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$ et que ${}^t(AB)$ et ${}^tB{}^tA$ sont deux matrices de $M_{(p,n)}(\mathbb{K})$. On note :

$$(AB) = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} \qquad {}^t(AB) = (\beta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \quad \text{et} \quad {}^tB{}^tA = (\gamma_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$$

$(AB) = (\alpha_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ alors

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$$

${}^t(AB) = (\beta_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ donc

$$\beta_{ij} = \alpha_{ji} = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}b_{ki} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki}a_{jk} = \gamma_{ij}$$

d'où ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$

■

Définition 14
Soit une matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$.

1. On dit que A est une matrice symétrique si ${}^tA = A$.
2. dit que A est une matrice antisymétrique si ${}^tA = -A$.

Exemple 13

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$.

   ${}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 11 \end{pmatrix} = A$ donc A est une matrice symétrique.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 15 \\ -2 & -15 & 0 \end{pmatrix}$.

$$^tB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -15 \\ 2 & 15 & 0 \end{pmatrix} = -B \text{ donc } B \text{ est une matrice antisymétrique.}$$

Remarque

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est une matrice antisymétrique alors

$$a_{ii} = 0 \qquad \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Exercice 4

Soit $A \in M_{(n,p)}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que les produits ${}^tA \times A$ et $A \times {}^tA$ sont bien définis.
2. Montrer que les matrices ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont des matrices symétriques.

IV Série d'exercices

Série n° 1

Exercice 1

Calculer, si cela est possible, $3A - \frac{1}{2}B$

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 6 \\ \frac{3}{2} & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -7 & 2 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 5i & 0 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 9 \\ 15 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 14 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Calculer, si cela est possible, AB et BA

1. $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ i & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2-i & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3+i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-2i \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 3

Calculer, si cela est possible, A^2, AB, BA, ${}^tBA$ et ${}^tA^tB$

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{2013}.

(On peut remarquer que $A = I + 4J$ ou $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.)

Exercice 5

On considère la matrice et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ existe-t-il une matrice carrée non nul B tel que $AB = 0$?

Exercice 6

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On considère les matrices $S = A + {}^tA$ et $R = A - {}^tA$

1. Montrer que S est une matrice symétrique.
2. Montrer que R est une matrice antisymétrique.
3. Déduire une décomposition de A en une somme d'une matrice symétrique et une matrice antisymétrique.

Exercice 7

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$. Montrer

que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $A^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^p & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_n^p \end{pmatrix}$

2. Peut-on trouver une matrice carrée non nulle M tel que
   (a) $M^2 = M$.
   (b) $M^2 = 0$

Index

$\mathbb{K}$, 74
$A \vee B$, 82
$A \wedge B$, 83
A^p, 22
A^{-1}, 45
A_{ij}, 32
I_n, 18
$M_{(n,p)}(\mathbb{K})$, 1
$P^(k)$, 78
$V(P)$, 77
$\bar{z}$, 64
δ_{ij}, 18
$\mathbb{C}$, 63
$\mid A \mid$, 31
$\det A$, 31, 34
$\mathrm{com}(A)$, 46
$\mathrm{Im}(z)$, 63
$\mathrm{R}(z)$, 63
$\arg(z)$, 65
$\deg(P)$, 77
i, 63
${}^TA$, 25
${}^tA$, 25

affixe, 64
Algorithme d'exponentiation, 91

Binôme de Newton, 24
Bézout, 84

comatrice, 46
Conjugué, 64

degré d'un polynôme, 77
dimension
    d'une matrice, 1
diviseur d'un polynôme, 81
Division euclidienne, 79
déterminant
    d'une matrice d'ordre 1, 31
    d'une matrice d'ordre 2, 31
    d'une matrice d'ordre $>$2, 34, 35, 37

Forme trigonométrique, 65

Gauss, 84

Horner, Algorithme, 90

inverse
    d'une matrice, 45

liniarisation, 68, 69

Matrice
    adjointe, 46
matrice, 1
    carrée, 1
    opposée, 5
    antisymétrique, 26
    diagonale, 17
    identité, 18
    nulle, 4
    symétrique, 26
    transposée, 25
    triangulaire, 17
    unité, 18
Module, 65
Moivre, 67

ordre
  d'une matrice carrée, 1

PGCD, 83
Plan complexe, 64
polynôme dérivé, 78
polynôme irréductible, 85
polynôme nul, 75
polynôme unitaire, 81
polynômes associés, 82
Polynômes premiers entre eux, 84
PPCM, 82

racine $n^{\text{ièmme}}$, 69
racine d'ordre k, 87
racine d'un polynôme, 75
Règle de Srrus, 44

signature, 32
sous-matrice, 32

Taylor, 89
transposée d'une matrice, 25

valuation d'un polynôme, 77