GELE2112 Chapitre 6 : Circuits RLC

Gabriel Cormier, Ph.D.

Université de Moncton

Hiver 2009

Contenu

Ce chapitre présente des circuits qui contiennent des inductances et des condensateurs.

- Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle

Contenu

Ce chapitre présente des circuits qui contiennent des inductances et des condensateurs.

- Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle
- Réponse échelon d'un circuit RLC parallèle

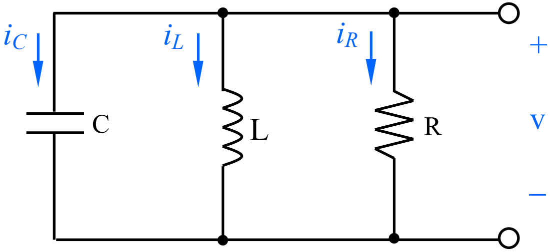
Contenu

Ce chapitre présente des circuits qui contiennent des inductances et des condensateurs.

- Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle
- Réponse échelon d'un circuit RLC parallèle
- Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle

Le circuit RLC parallèle est donné à la figure suivante :



Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle

On cherche la tension v. On fait la somme des courants au noeud supérieur.

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\,d\tau + I_0 + C\frac{dv}{dt} = 0$$

On dérive cette équation par rapport à t, pour éliminer l'intégrale :

$$\frac{1}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C\frac{d^2v}{dt^2} = 0$$

On réarrange l'équation pour mettre les dérivées en ordre décroissant :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$$

C'est une équation différentielle du 2^e ordre.

Réponse naturelle d'un circuit RLC parallèle

La solution à cette équation dépend des racines de *l'équation caractéristique*. Pour obtenir cette équation, on remplace :

$$s^n = \frac{d^n}{dt^n}$$

L'équation caractéristique est donc :

$$s^2 + \frac{s}{RL} + \frac{1}{LC} = 0$$

Racines

Les racines de cette équation sont :

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Selon la valeur des racines, la solution est différente.

CAS 1

CAS 1 : $\omega_0^2 < \alpha^2$: réponse sur-amortie

Dans ce cas-ci, la solution est :

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

et on obtient A_1 et A_2 selon :

$$v(0^+) = A_1 + A_2$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2$$

CAS 2

CAS 2 : $\omega_0^2 > \alpha^2$: réponse sous-amortie

Dans ce cas-ci, la solution est :

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

On obtient B_1 et B_2 selon :

$$v(0^+) = V_0 = B_1$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

CAS 3

CAS 3 : $\omega_0^2 = \alpha^2$: réponse amortissement critique

Dans ce cas-ci, la solution est :

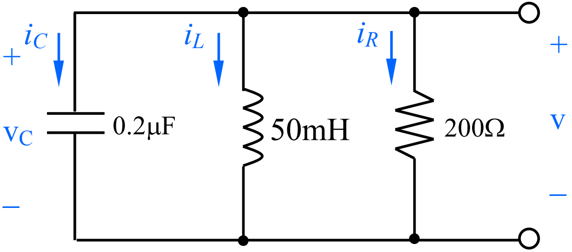
$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}$$

On obtient D_1 et D_2 selon :

$$v(0^+) = V_0 = D_2$$
$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$

Exemple

Pour le circuit de la figure suivante, où l'on a les conditions initiales $v_C(0^+) = 12\text{V}$ et $i_L(0^+) = 30\text{mA}$,



1. Calculer le courant initial dans chaque branche.
2. Calculer la valeur initiale de $\frac{dv}{dt}$.
3. Donner l'expression de $v(t)$.
4. Donner l'expression de $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $i_R(t)$.

Exemple

1. L'inductance s'oppose à une variation instantanée de courant, donc :

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = i_L(0) = 30 \text{ mA}$$

Le condensateur ne permet pas une variation instantanée de tension, alors

$$v_C(0^+) = v_L(0^+) = v_R(0^+) = 12 \text{ V}$$

Exemple

Le courant initial dans la résistance est alors :

$$i_R(0^+) = \frac{v_R(0^+)}{R} = \frac{12}{200} = 60 \text{ mA}$$

En appliquant la loi de Kirchhoff des courants au noeud supérieur, on peut calculer le courant dans la capacitance :

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = -90 \text{ mA}$$

Exemple

2. Puisque $i_C = C\frac{dv}{dt}$,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{-0.09}{0.2 \times 10^{-6}} = -450 \text{ kV/s}$$

Exemple

3. On doit calculer les racines de l'équation caractéristique :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(200)(0.2 \times 10^{-6})} = 12500$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.2 \times 10^{-6})(0.05)}} = 10000$$

On est donc dans la situation où $\alpha^2 > \omega_0^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -5000$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20000$$

qui sont deux racines réelles distinctes.

Exemple

Il faut trouver les constantes A_1 et A_2.

$$v(0^+) = A_1 + A_2 = 12$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -5000A_1 - 20000A_2 = -450000$$

On solutionne pour obtenir $A_1 = -14$ et $A_2 = 26$. La tension est :

$$v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20000t} \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

Exemple

On peut vérifier la solution. Il faut que $v(t=0)=v(0^+)$.

$$v(0) = -14 + 26 = 12 \checkmark$$

Et si on dérive,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -14(-5000) + 26(-20000) = -450000 \checkmark$$

Exemple

4. On peut calculer les courants à l'aide de l'équation de tension $v(t)$. Le courant dans la résistance est :

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = -0.07e^{-5000t} + 0.13e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0$$

Le courant dans la capacitance est :

$$\begin{aligned} i_C(t) = C\frac{dv(t)}{dt} &= (0.2 \times 10^{-6})(70000e^{-5000t} - 520000e^{-20000t}) \\ &= 0.014e^{-5000t} - 0.104e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0^+ \end{aligned}$$

Exemple

Et dans l'inductance, puisque $i_L(t) = -i_R(t) - i_C(t)$,

$$i_L(t) = 0.056e^{-5000t} - 0.026e^{-20000t} \text{ A}, t \geq 0$$

On aurait aussi pu utiliser l'intégrale pour calculer i_L, mais c'est plus long.

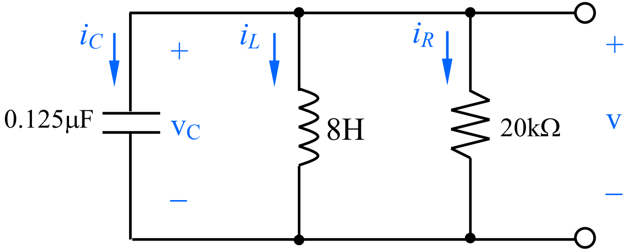
On peut vérifier les solutions, pour obtenir les même réponses qu'à la question 1.

$$\begin{aligned} i_R(0) &= -0.07 + 0.13 = 0.06 \text{ A} = 60 \text{ mA} \checkmark \\ i_C(0^+) &= 0.014 - 0.104 = -0.09 \text{ A} = -90 \text{ mA} \checkmark \\ i_L(0) &= 0.056 - 0.026 = 0.03 \text{ A} = 30 \text{ mA} \checkmark \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Exemple

Pour le circuit de la figure suivante, où l'on a les conditions initiales $v_C(0^+) = 0\text{V}$ et $i_L(0^+) = -12.25\text{mA}$,



1. Calculer les racines de l'équation caractéristique.
2. Calculer la valeur initiale de v et $\frac{dv}{dt}$.
3. Donner l'expression de $v(t)$.

Exemple

1. On calcule les coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(20 \times 10^3)(0.125 \times 10^{-6})} = 200$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(8)(0.125 \times 10^{-6})}} = 1000$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200 + j979.8$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -200 - j979.8$$

Si les racines sont complexes, elles seront toujours conjuguées $(s_2 = s_1^*)$.

Exemple

2. La valeur initiale de v est $v(0^+) = v(0) = 0$V. Pour calculer la valeur initiale de $\frac{dv}{dt}$, on a :

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C}$$

donc il faut calculer $i_C(0^+)$.

Le courant initial dans la résistance est :

$$i_R = \frac{v(0)}{R} = 0$$

Exemple

Donc le courant dans la capacitance est :

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0) = 12.25 \text{ mA}$$

et alors,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = \frac{12.25}{0.125 \times 10^{-6}} = 98 \text{ kV/s}$$

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Exemple

3. Puisque $\omega_0^2 > \alpha^2$, la solution est :

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{1000^2 - 200^2} = 979.8 \text{ rad/s}$$

Exemple

On trouve B_1 et B_2 selon :

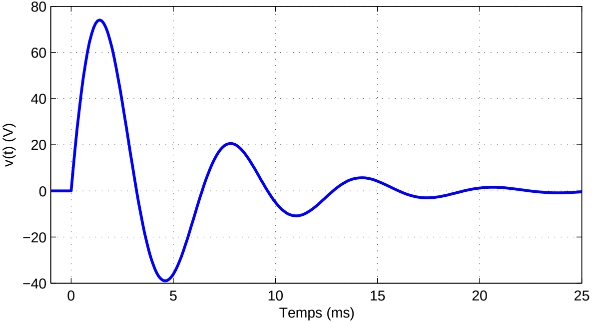
$$B_1 = v(0^+) = 0$$
$$\frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$
$$\Rightarrow 98000 = 979.8 B_2 \Rightarrow B_2 \cong 100 \text{ V}$$

La tension est :

$$v(t) = 100 e^{-200t} \sin(979.8t) \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

Exemple

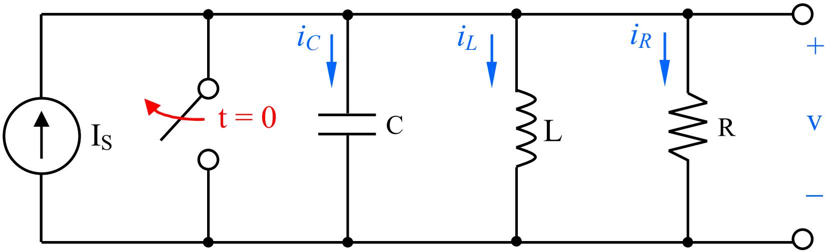
Le graphe de la tension est :



Remarquer que la tension oscille, devenant même négative, tout en s'affaiblissant, à cause de l'exponentiel.

Réponse échelon d'un circuit RLC parallèle

Le circuit RLC parallèle est donné à la figure suivante. Lorsque l'interrupteur est ouvert, la source I_S est subitement appliquée au circuit.



Réponse échelon d'un circuit RLC parallèle

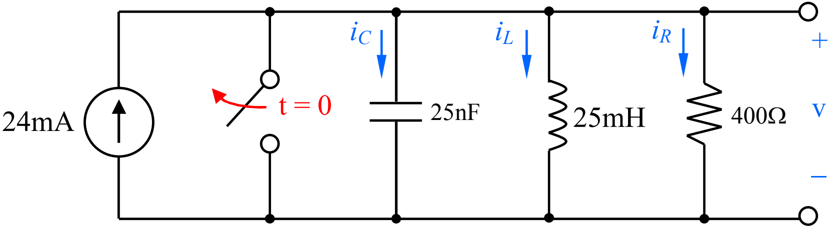
Dans ce cas, la solution de la tension est du même type que celle présentée avant, sauf qu'il y a un nouveau terme :

$$x(t) = x_f + x_n(t) \tag{1}$$

où x_f est la valeur finale de v ou i, et $x_n(t)$ est la réponse naturelle de $x(t)$ (solutions obtenue à la section précédente).

Exemple

Pour le circuit de la figure suivante, l'énergie initiale est nulle.



1. Calculer la valeur initiale du courant dans l'inductance, $i_L(0)$.
2. Calculer la valeur initiale de $\frac{di_L(0)}{dt}$.
3. Calculer les racines de l'équation caractéristique.
4. Donner l'expression du courant $i_L(t)$, pour $t \geq 0$.

Exemple

1. Puisque l'énergie initiale du circuit est nulle, le courant initial dans l'inductance est nul aussi.

$$i_L(0) = 0$$

2. Puisque l'énergie initiale est nulle, la tension aux bornes de l'inductance sera nulle aussi : $v_L(0^+) = 0$. On a la relation :

$$v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = \frac{v_L(0)}{L} = 0$$

Exemple

3. On calcule les coefficients,

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2(400)(25\times 10^{-9})} = 50000$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.025)(25\times 10^{-9})}} = 16\times 10^{8}$$

On est donc dans la situation où $\omega_0^2 < \alpha^2$. Les deux racines sont :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -20000 \text{ rad/s}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -80000 \text{ rad/s}$$

Exemple

4. La solution est de la forme :

$$i(t) = I_f + i_n(t)$$

où

$$i_n(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

On calcule A_1 et A_2 selon

$$i_L(0) = I_f + A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di_L(0)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -20000 A_1 - 80000 A_2 = 0$$

Exemple

La valeur finale du courant est $I_f = i_L(\infty) = 24\text{mA}$: l'inductance est un court-circuit. Tout le courant de la source passera dans l'inductance. Les équations sont alors :

$$0 = 0.024 + A_1 + A_2$$
$$0 = -20000A_1 - 80000A_2$$

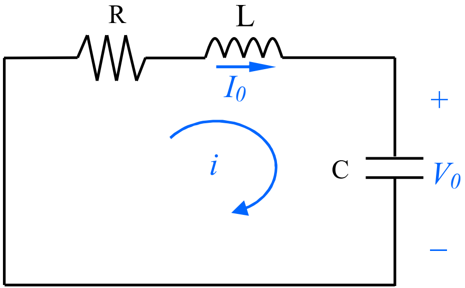
qu'on solutionne pour obtenir $A_1 = -32\text{mA}$, et $A_2 = 8\text{mA}$.

L'expression du courant est :

$$i_L(t) = 24 - 32e^{-20000t} + 8e^{-80000t} \text{ mA}, \qquad t \geq 0$$

Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

- Étapes de calcul sont les mêmes
- Solutionne pour le courant (au lieu de la tension)
- Courant initial I_0 dans l'inductance.
- Tension initiale V_0 pour la capacitance.



Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

On applique la loi des tensions de Kirchhoff à la boucle :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau + V_0 = 0$$

On dérive pour enlever l'intégrale,

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0$$

qu'on peut réarranger :

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

L'équation caractéristique est :

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

dont les racines sont :

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

ou,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

où

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

- Solutions de la même forme
- Solutionne pour le courant au lieu de la tension
- 3 solutions possibles

① $\alpha^2 > \omega_0^2 \longrightarrow i(t) = I_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$

② $\omega_0^2 > \alpha^2 \longrightarrow i(t) = I_f + B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$

③ $\omega_0^2 = \alpha^2 \longrightarrow i(t) = I_f + D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}$

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

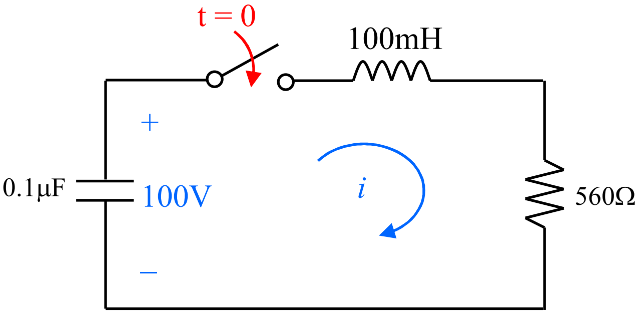
Réponse naturelle et échelon d'un circuit RLC série

Pour trouver les différentes constantes, on utilise $i(0^+)$ et $\frac{di(0^+)}{dt}$ (au lieu de $v(0^+)$ et $\frac{dv(0^+)}{dt}$).

La réponse échelon donne la même chose que pour les circuits RLC parallèle : il faut ajouter le terme i_f (ou v_f) à la solution des équations.

Exemple

Pour le circuit de la figure suivante, le condensateur possède une charge initiale de 100V.



1. Calculer $i(t)$ pour $t \geq 0$.
2. Calculer $v_C(t)$ pour $t \geq 0$.

Exemple

1. La première étape est de faire l'analyse du circuit pour $t = 0^-$.

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 100 \text{ V}$$
$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

Les coefficients de ce circuit sont :

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2(0.1)} = 2800$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.1)(1 \times 10^{-7})}} = 10000$$

Exemple

On est dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$. La solution est :

$$i(t) = i_f + B_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10000^2 - 2800^2} = 9600 \text{ rad/s}$$

Exemple

Le courant final $i_f = 0$; le condensateur se comportera comme un circuit ouvert. On calcule les autres constantes :

$$\begin{aligned} i(0^+) = B_1 + i_f = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \\ \frac{di(0^+)}{dt} = \frac{v_L(0^+)}{L} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \\ \Rightarrow \frac{100}{0.1} = 9600 B_2 \Rightarrow B_2 = 0.1042 \text{ A} \end{aligned}$$

La tension initiale aux bornes de l'inductance est la même que celle aux bornes de la capacitance, parce que le courant initial est nul : il n'y a pas de chute de tension aux bornes de la résistance, donc $v_L(0^+) = v_C(0^+)$.

Exemple

L'expression du courant est :

$$i(t) = 0.1042e^{-2800t}\sin(9600t)\ \text{A}, \qquad t \geq 0$$

Exemple

2. On a deux options pour calculer la tension aux bornes du condensateur :

$$① \; v_c = -\frac{1}{C}\int_0^t i \, d\tau + 100 \qquad ② \; v_c = Ri + L\frac{di}{dt}$$

En général, il est plus facile de dériver que d'intégrer.

$$\begin{aligned}\frac{di}{dt} &= 0.1042\left(-2800e^{-2800t}\sin(9600t) + 9600e^{-2800t}\cos(9600t)\right) \\ &= -291.67e^{-2800t}\sin(9600t) + 1000e^{-2800t}\cos(9600t)\end{aligned}$$

et donc,

$$L\frac{di}{dt} = -29.17e^{-2800t}\sin(9600t) + 100e^{-2800t}\cos(9600t)$$

Exemple

La chute de tension aux bornes de la résistance est :

$$Ri = 58.33e^{-2800t}\sin(9600t)$$

ce qui donne une tension aux bornes du condensateur de :

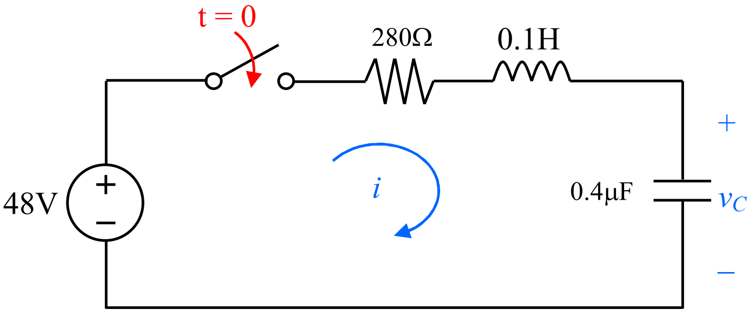
$$v_C(t) = 29.17e^{-2800t}\sin(9600t) + 100e^{-2800t}\cos(9600t)\ \text{V}, \qquad t \geq 0$$

On peut vérifier :

$$v_C(0^+) = 100\ \checkmark$$

Exemple

Pour le circuit de la figure suivante, l'énergie initiale du circuit est nulle.



1. Calculer $v_C(t)$ pour $t \geq 0$.

Exemple

La première étape est de faire l'analyse du circuit pour $t = 0^-$. Puisqu'il n'y a pas d'énergie initiale,

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 0$$
$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

Les coefficients de ce circuit sont :

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{280}{2(0.1)} = 1400$$
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.1)(4 \times 10^{-7})}} = 5000$$

Exemple

On est dans la situation où $\omega_0^2 > \alpha^2$; la solution est :

$$v_C(t) = v_f + B_1 e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t) + B_2 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

où

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{5000^2 - 1400^2} = 4800 \text{ rad/s}$$

Exemple

La tension finale aux bornes du condensateur est la tension de la source ($v_f = 48\text{V}$). Pour $t \to \infty$, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert. Il n'y aura donc pas de courant qui circule dans la boucle, ce qui veut dire qu'il n'y a pas de chute de tension aux bornes de la résistance et de l'inductance.

Exemple

On cherche maintenant B_1 et B_2 avec $v_C(0^+)$ et $\frac{dv(0^+)}{dt}$.

$$v(0^+) = B_1 + v_f = 0 \Rightarrow B_1 = -48 \text{ V}$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

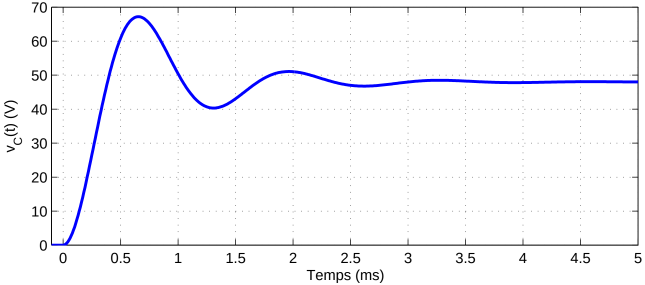
$$\Rightarrow 0 = -1400 B_1 + 4800 B_2 \Rightarrow B_2 = -14 \text{ V}$$

ce qui donne :

$$v_C(t) = 48 - 48e^{-1400t}\cos(4800t) - 14e^{-1400t}\sin(4800t) \text{ V}, \qquad t \geq 0$$

Exemple

Le graphe de $v_C(t)$ est :



On voit bien que la tension se stabilise à 48V pour $t \gg 0$.