GELE2511 Chapitre 3 : Série de Fourier

Gabriel Cormier, Ph.D.

Université de Moncton

Hiver 2013

Contenu

Contenu

- Analyse sinusoïdale
- Série de Fourier
- Coefficients
- Symétrie
- Formes alternatives
- Spectre

Introduction

- Ce chapitre présente une nouvelle méthode d'analyse de signaux et de circuits : la série de Fourier.
- On verra qu'on peut décomposer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoïdes.
- Cette décomposition du signal permet d'analyser le contenu fréquentiel d'un signal et déterminer son spectre.

Série de Fourier

- On peut démontrer que les sinusoïdes sont les signaux les plus faciles à utiliser lors de l'analyse de circuits ou de systèmes.
- Les sinusoïdes permettent de rapidement calculer la réponse d'un système en régime permanent, sans calculer la réponse transitoire.
- Si l'entrée à un système est une sinusoïde, la sortie sera aussi une sinusoïde, de même fréquence (l'amplitude et la phase peuvent changer).

Série de Fourier

- Les sinusoïdes sont les seuls signaux périodiques à posséder cette propriété.
- Pour les autres sources périodiques (ex : triangulaire), il faut trouver une autre méthode d'analyse.
- La série de Fourier permet de prendre n'importe quel signal périodique, et le décomposer en une somme de sinusoïdes.

Série de Fourier

- Le mathématicien Jean-Batiste Fourier découvrit qu'on pouvait décomposer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoïdes.
- Pour une fonction périodique $f(t)$, sa série de Fourier est :

Série de Fourier

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

où a_v, a_n et b_n sont les coefficients de la série de Fourier, et ω_0 est la fréquence fondamentale.

Série de Fourier

- Les fréquences qui sont des multiples de ω_0 sont appelés des *harmoniques*.
  - Ex : $2\omega_0$ est la deuxième harmonique,
  - Ex : $5\omega_0$ est la cinquième harmonique.

Coefficients de la série de Fourier

Les coefficients sont calculés selon :

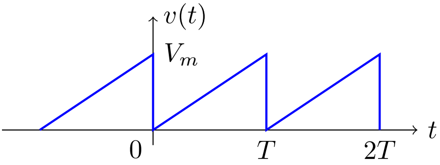
$$a_v = \frac{1}{T}\int_T f(t)dt \qquad \text{(valeur moyenne)}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_T f(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Exemple

Calculer la série de Fourier du signal périodique suivant.



L'équation de $v(t)$ entre 0 et T est :

$$v(t) = \frac{V_m}{T} t$$

L'équation pour a_v est :

$$a_v = \frac{1}{T} \int_T \frac{V_m}{T} t \, dt = \frac{V_m}{2}$$

Exemple (2)

On calcule a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T}\int_T \frac{V_m}{T} t\cos(n\omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{n^2\omega_0^2}\cos(n\omega_0 t) + \frac{t}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right)\Bigg|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{n^2\omega_0^2}(\cos(2\pi n) - 1)\right) = 0 \quad \text{pour tout } n \end{aligned}$$

Exemple (3)

On calcule b_n :

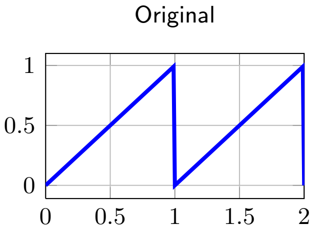
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T}\int_T \frac{V_m}{T} t\sin(n\omega_0 t)\,dt \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(\frac{1}{n^2\omega_0^2}\sin(n\omega_0 t) + \frac{t}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\right)\Bigg|_0^T \\ &= \frac{2V_m}{T^2}\left(0 - \frac{T}{n\omega_0}(\cos(2\pi n) - 1)\right) = -\frac{V_m}{n\pi} \end{aligned}$$

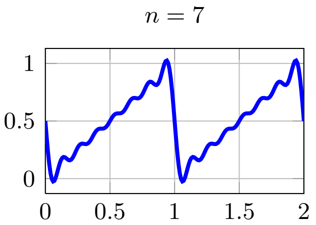
La série de Fourier de $v(t)$ est :

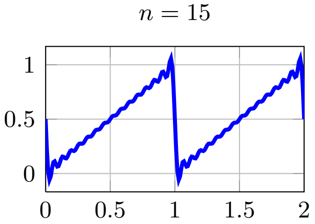
$$v(t) = \frac{V_m}{2} - \frac{V_m}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\omega_0 t)$$

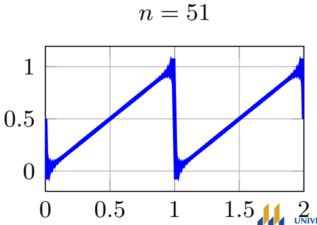
Exemple (4)

Reconstruction du signal (si $T = 1$s) :









Reconstruction du signal

- On voit bien, selon la figure précédente, que plus le nombre d'harmoniques utilisées est élevé, plus le signal original est reconstruit fidèlement.
- Cependant, lorsqu'il y a une discontinuité, il y a un pic qui apparaît dans le signal reconstruit : on appelle ceci l'effet Gibbs.

Calcul des coefficients

- Le calcul des coefficients de la série de Fourier est, généralement, assez long.
- N'importe quoi qui simplifie la tâche est bénéfique.
- Selon le type de symétrie dans le signal, on peut grandement simplifier le calcul des coefficients.

Symétrie paire

Pour des fonctions paires, on peut démontrer que les coefficients de la série de Fourier sont :

$$a_v = \frac{2}{T}\int_{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt$$

$$b_n = 0$$

Symétrie impaire

Pour des fonctions impaires, on peut démontrer que les coefficients de la série de Fourier sont :

$$\begin{aligned} a_v &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{4}{T}\int_{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Symétrie demi-onde

Pour des fonctions ayant la symétrie demi-onde, on peut démontrer que les coefficients de la série de Fourier sont :

$$
\begin{aligned}
a_v &= 0 \\
a_n &= 0 \quad \text{pour } n \text{ pair} \\
a_n &= \frac{4}{T}\int_{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \quad \text{pour } n \text{ impair} \\
b_n &= 0 \quad \text{pour } n \text{ pair} \\
b_n &= \frac{4}{T}\int_{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad \text{pour } n \text{ impair}
\end{aligned}
$$

Symétrie quart-d'onde

- Une fonction ayant la symétrie quart d'onde peut être rendue paire ou impaire en faisant un choix approprié de $t = 0$.
- Selon le cas où on rend la fonction paire ou impaire, les coefficients seront différents.

Symétrie quart-d'onde

Si on rend la fonction paire, on peut démontrer que les coefficients de la série de Fourier sont :

$$a_v = 0$$

$$a_n = 0 \qquad \text{pour } n \text{ pair}$$

$$a_n = \frac{8}{T}\int_{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)dt \qquad \text{pour } n \text{ impair}$$

$$b_n = 0$$

Symétrie quart-d'onde

Si on rend la fonction impaire, on peut démontrer que les coefficients de la série de Fourier sont :

$$a_v = 0$$

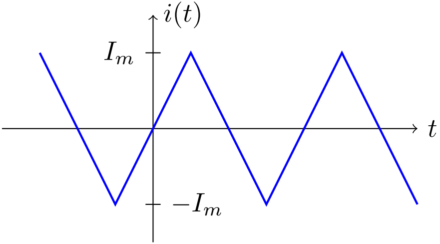
$$a_n = 0$$

$$b_n = 0 \quad \text{pour } n \text{ pair}$$

$$b_n = \frac{8}{T}\int_{T/4} f(t)\sin(n\omega_0 t)dt \quad \text{pour } n \text{ impair}$$

Exemple

Calculer la série de Fourier du signal périodique suivant.



On vérifie la symétrie : la fonction est impaire, avec de la symétrie demi-onde et quart d'onde. On aura donc seulement besoin de calculer b_n. Dans l'intervalle d'un quart de période,

$$i(t) = \frac{4I_m}{T}t$$

Exemple (2)

On calcule b_n :

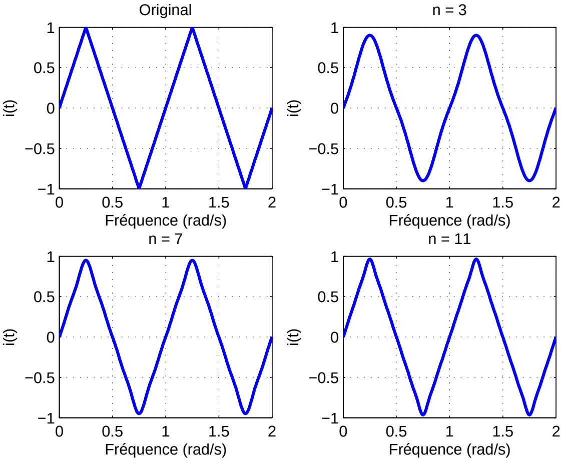
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{8}{T}\int_{T/4} \frac{4I_m}{T} t\sin(n\omega_0 t)dt \\
&= \frac{32I_m}{T^2}\left(\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} - \frac{t\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right)\Bigg|_0^{T/4} \\
&= \frac{8I_m}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \qquad n \text{ est impair}
\end{aligned}
$$

La série de Fourier est :

$$
i(t) = \frac{8I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(n\omega_0 t)
$$

Exemple (3)

Reconstruction du signal (si $T = 1\text{s}$) :



Formes alternatives

- Il existe 2 autres façons d'exprimer la série de Fourier : sous forme polaire, ou forme exponentielle.
- La forme polaire permet de mieux identifier l'amplitude et la phase des composantes d'un signal.
- La forme exponentielle est souvent plus simple pour les calculs mathématiques. C'est la forme la plus utilisée en traitement de signal.

Forme polaire

Forme polaire :

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

où

$$|A_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$
$$\theta_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Forme exponentielle

Forme exponentielle :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

où

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Relations entre les formes

À partir de la forme exponentielle, la forme polaire est :

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|C_n| \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

et la forme trigonométrique est :

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)$$

où

$$2C_n = A_n - jB_n, \quad C_0 = A_0$$

Spectre

- Une fonction périodique est complètement définie par ses coefficients de Fourier et sa période. Si on connaît a_v, a_n, b_n et ω_0, on peut construire $f(t)$.
- Si on connaît a_n et b_n, on connaît aussi l'amplitude A_n et la phase θ_n de chaque harmonique.
- La forme exponentielle de la série de Fourier permet d'obtenir directement l'amplitude et la phase des harmoniques.

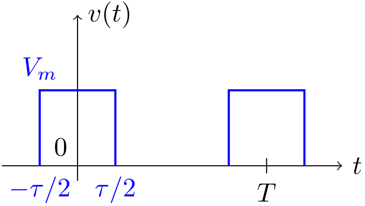
UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Spectre

- On peut représenter graphiquement une fonction périodique en termes de l'amplitude et la phase de chaque fréquence présente dans le signal.
- On appelle ceci le *spectre* de la fonction. Ce graphe permet de visualiser quelles fréquences ont une amplitude importante ; dans certains cas, la majorité du signal est contenue dans quelques harmoniques.

Exemple

Donner le spectre de la fonction suivante si $V_m = 5$V et $\tau = T/5$.



On utilise la forme exponentielle.

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-jn\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{V_m}{T}\left(\frac{e^{-jn\omega_0 t}}{-jn\omega_0 t}\right)\Bigg|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{2V_m}{n\omega_0 T}\sin\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

Exemple (2)

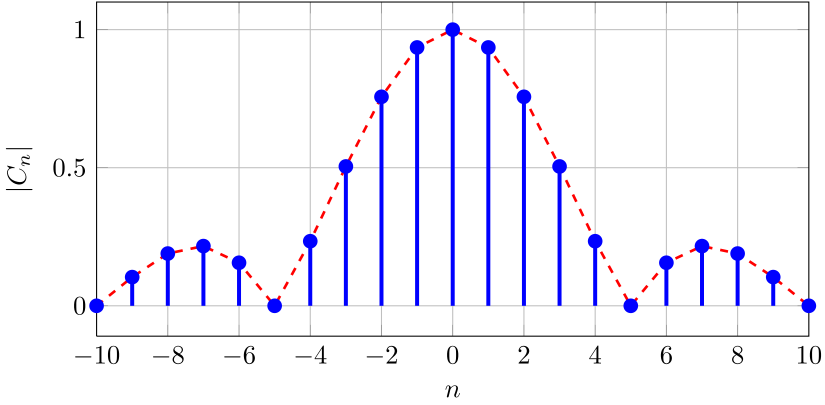
On peut écrire sous une autre forme :

$$C_n = \frac{V_m \tau}{T} \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} = \frac{\sin(n\pi/5)}{n\pi/5}$$
$$= \mathrm{sinc}(n\pi/5)$$

en remplaçant par les valeurs du problème.

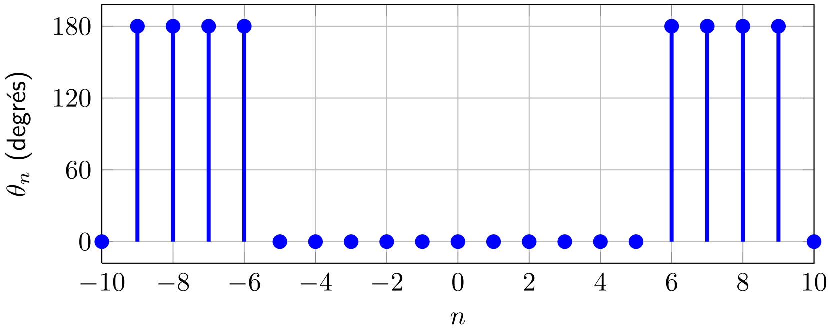
Exemple (3)

Le spectre d'amplitude :



Exemple (4)

Le spectre de phase :



Puisque C_n est réel (dans ce cas-ci), la phase est seulement $0°$ ou $180°$.

Valeur RMS

- La valeur RMS d'un signal peut être calculée à partir de la série de Fourier. On remplace la fonction $f(t)$ par sa série de Fourier :

$$F_{rms} = \sqrt{a_v^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{\sqrt{2}} \right)^2}$$

- Par contre, il est généralement plus simple de calculer la valeur RMS à partir de la fonction, plutôt que la série de Fourier.

Conclusion

Les points clés de ce chapitre sont :

- Calcul de la série de Fourier d'une fonction périodique.
- Utilisation de la symétrie pour simplifier le calcul.
- Calcul du spectre d'un signal périodique.