GELE2511 Chapitre 4 : Transformée de Fourier

Gabriel Cormier, Ph.D., ing.

Université de Moncton

Hiver 2013

Contenu

Contenu

- Définition de la transformée de Fourier
- Convergence de la transformée de Fourier
- Utilisation de la transformée de Laplace
- Application
- Théorème de Parseval

Introduction

- Au chapitre précédent, on a vu comment on pouvait représenter une fonction périodique par une somme de sinusoïdes.
- La transformée de Fourier permet de représenter en fréquence des signaux qui ne sont pas périodiques.

Introduction

- La transformée de Fourier est un cas spécial de la transformée de Laplace.
- En télécommunications, la transformée de Fourier est plus utile que la transformée de Laplace.

Dérivation de la transformée de Fourier

- On peut obtenir la transformée de Fourier à partir de la série de Fourier.
- À partir de la définition de la série de Fourier, on va prendre un signal, et rendre sa période infinie.
- Rappel (série de Fourier) :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

où

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Dérivation de la transformée de Fourier

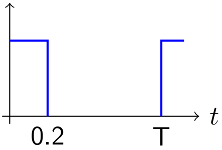
- On cherche une série de Fourier pour un signal apériodique.
- Si on fait tendre la période T vers l'infini ($T \to \infty$), on passe d'un signal périodique à un signal apériodique.
- On regarde alors les effets sur la série de Fourier.

Dérivation de la transformée de Fourier

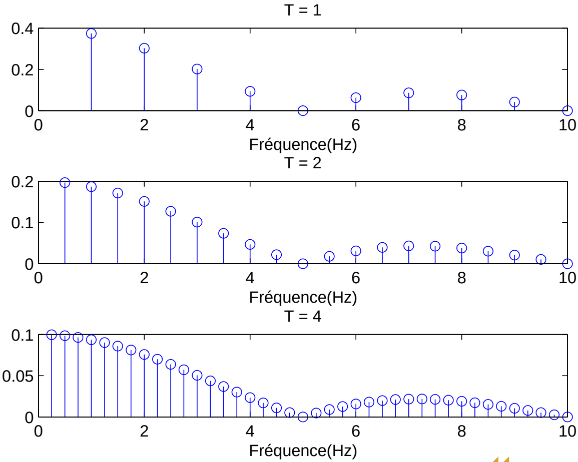
- Si T augmente, la séparation entre les harmoniques devient de plus en plus petite.
- On passe donc d'un spectre qui est seulement définit à quelques points à un spectre qui est continu (infinité d'harmoniques).
- La différence entre deux points de la série de Fourier est :

$$\Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0$$

Exemple



Le pulse dure 0.2s. On augmente T pour voir l'impact sur la série de Fourier.



Dérivation de la transformée de Fourier

- La différence entre 2 harmoniques est tout simplement la fréquence fondamentale.
- Mais,
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$
- Alors si $T \to \infty$, la séparation entre les fréquences devient de plus en plus petite, et devient $d\omega$.
- On passe d'un spectre discret à un spectre continu.

Dérivation de la transformée de Fourier

- Au fur et à mesure que la période augmente,

$$n\omega_0 \to \omega$$

- Les coefficients de la série de Fourier deviendront de plus en plus faibles : $C_n \to 0$ lorsque $T \to \infty$.

Dérivation de la transformée de Fourier

- Cependant, le produit C_nT ne devient pas nul :

$$C_nT = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

- Cette équation représente la transformée de Fourier.

Transformée de Fourier

$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$$

Transformée inverse

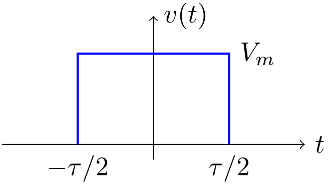
La transformée inverse de Fourier :

Transformée inverse de Fourier

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega$$

Exemple

Faire la transformée de Fourier du pulse suivant.



En appliquant directement l'équation :

$$\begin{aligned}
V(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_m e^{-j\omega t}\, dt \\
&= V_m \left. \frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
&= \frac{V_m}{j\omega}\left(-2j\sin(\omega\tau/2)\right) = V_m \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)
\end{aligned}$$

Convergence

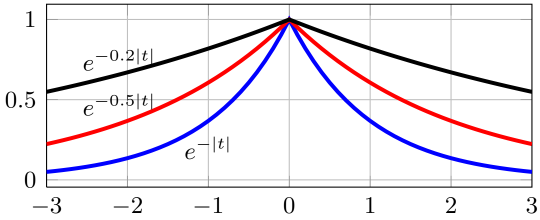
- Pour que la transformée de Fourier existe, il faut que la fonction $f(t)$ converge.
- Les pulses et exponentiels, très utilisés en génie électrique, sont des intégrales qui converges.
- Cependant, certains signaux intéressants, comme une constante ou une sinusoïde, n'ont pas d'intégrale qui converge.
- Dans ces cas, on fait un peu de gymnastique mathématique pour obtenir la transformée de Fourier de ces signaux.

Exemple : constante

Pour une constante A, son intégrale ne converge pas :

$$\int_{-\infty}^{\infty} A\,dt = \infty$$

On fait alors l'approximation suivante : $f(t) = Ae^{-|\epsilon|t}$. Si $\epsilon \to 0$, alors $f(t) \to A$.



Exemple : constante (2)

La transformée de Fourier de $f(t)$ est :

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{0} Ae^{\epsilon t}e^{-j\omega t}\,dt + \int_{0}^{\infty} Ae^{-\epsilon t}e^{-j\omega t}\,dt$$

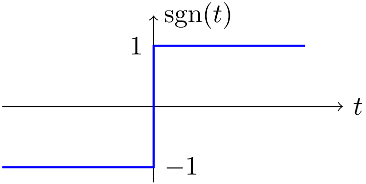
ce qui donne,

$$F(\omega) = \frac{A}{\epsilon - j\omega} + \frac{A}{\epsilon + j\omega} = \frac{2\epsilon\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}$$

Et puis, on applique $\epsilon \to 0$: ceci donne un pulse $\delta(\omega)$. L'amplitude du pulse est $2\pi A$. La transformée de Fourier d'une constante est :

$$\mathfrak{F}(A) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Exemple : signum



$$\mathrm{sgn}(t) = u(t) - u(-t)$$

Pour obtenir la transformée de Fourier de $\mathrm{sgn}(t)$, il faut aussi faire une approximation.

$$\mathrm{sgn}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(e^{-\epsilon t} u(t) - e^{\epsilon t} u(-t) \right), \quad \epsilon > 0$$

Exemple : signum (2)

À partir de la définition de la série de Fourier,

$$F(\omega) = -\int_{-\infty}^{0} e^{\epsilon t} e^{-j\omega t}\, dt + \int_{0}^{\infty} e^{-\epsilon t} e^{-j\omega t}\, dt$$

$$= -\frac{e^{(\epsilon - j\omega)t}}{\epsilon - j\omega}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-(\epsilon + j\omega)t}}{\epsilon + j\omega}\bigg|_{0}^{\infty} = \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}$$

On prend maintenant la limite $\epsilon \to 0$:

$$\mathfrak{F}(\mathrm{sgn}(t)) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{-2j\omega}{\omega^2 + \epsilon^2} = \frac{2}{j\omega}$$

Exemple : échelon

Pour faire la transformée de Fourier d'un échelon, il faut réécrire la définition :

$$u(t) = 0.5 + 0.5\,\mathrm{sgn}(t)$$

Alors,

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{u(t)\} &= \mathfrak{F}\{0.5\} + \mathfrak{F}\{0.5\,\mathrm{sgn}(t)\} \\ &= \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\end{aligned}$$

Utilisation de la transformée de Laplace

On peut utiliser la transformée de Laplace pour calculer la transformée de Fourier, selon quelques règles de base :

- Les pôles de la transformée de Laplace doivent être ≤ 0, et réels.
- Si $f(t) = 0$ pour $t < 0$, la transformée de Fourier est obtenue en remplaçant s par $j\omega$.
- Si $f(t) = 0$ pour $t > 0$, la transformée de Fourier est obtenue en faisant la transformée de Laplace de $f(-t)$, puis en remplaçant s par $-j\omega$.
- Si la fonction est non nulle pour tout t, on calcule 2 transformées : une pour $t > 0$, et une pour $t < 0$.

Exemple

Calculer la transformée de Fourier de : $e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$

La transformée de Laplace de cette fonction est :

$$F(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$$

Les pôles de cette fonction sont négatifs et réels, et $f(t) = 0$ pour $t < 0$. On remplace alors $s = j\omega$:

$$F(\omega) = \frac{j\omega+a}{(j\omega+a)^2+\omega_0^2}$$

Exemple

Calculer la transformée de Fourier de : $e^{at}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(-t)$

Puisque $f(t) = 0$ pour $t > 0$, on calcule $f(-t)$:

$$f(-t) = e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\mathrm{u}(t)$$

La transformée de Laplace de cette fonction est :

$$F(s) = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

Les pôles de cette fonction sont négatifs et réels. On remplace alors $s = -j\omega$:

$$F(\omega) = \frac{-j\omega + a}{(-j\omega + a)^2 + \omega_0^2}$$

Transformées opérationnelles

- Comme la transformée de Laplace, la transformée de Fourier possède elle aussi des transformées opérationnelles.
- Les transformées opérationnelles indiquent comment des opérations effectuées sur $f(t)$ ou $F(\omega)$ vont affecter l'autre domaine.
- Ces transformées permettent de simplifier le calcul des transformées de Fourier.

UNIVERSITÉ DE MONCTON
EDMUNDSTON MONCTON SHIPPAGAN

Multiplication par une constante

Si la transformée de Fourier de $f(t)$ est $F(\omega)$, alors,

$$\mathfrak{F}\{Kf(t)\} = KF(\omega)$$

On multiplie $F(\omega)$ par la même constante.

Addition (soustraction)

Si on a

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega)$$
$$\mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$
$$\mathfrak{F}\{f_3(t)\} = F_3(\omega)$$

alors

$$\mathfrak{F}\{f_1(t) + f_2(t) - f_3(t)\} = F_1(\omega) + F_2(\omega) - F_3(\omega)$$

Dérivée

Pour une dérivée :

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(\omega)$$

De façon générale,

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = (j\omega)^n F(\omega)$$

Intégrale

Pour une intégrale :

$$\mathfrak{F}\left\{\int_0^t f(t)\,dt\right\} = \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

Translation

Dans le temps :

$$\mathfrak{F}\{f(t-a)\} = e^{-j\omega a}F(\omega), \quad a > 0$$

En fréquence :

$$\mathfrak{F}\{e^{-j\omega_0 t}f(t)\} = F(\omega-\omega_0)$$

Échelonnage

Si le temps est compressé ou étiré :

$$\mathfrak{F}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a > 0$$

Convolution

La convolution est simplifiée :

$$\mathfrak{F}\{h(t) * x(t)\} = H(\omega)X(\omega)$$

Modulation

La modulation en amplitude est le processus de faire varier l'amplitude d'un signal $f(t)$ avec une sinusoïde $\cos(\omega_0 t)$.

$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = 0.5F(\omega - \omega_0) + 0.5F(\omega + \omega_0)$$

Dualité

Si $F(\omega)$ est la transformée de Fourier de $f(t)$, alors la transformée de Fourier de $F(t)$ est $2\pi f(-\omega)$:

$$F(t) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} 2\pi f(-\omega) \text{ si } f(t) \overset{\mathfrak{F}}{\leftrightarrow} F(\omega)$$

Exemple

En télécommunications, il est très commun de multiplier deux sinusoïdes, tels que

$$g_1(t) = 2\cos(200t) \qquad g_2(t) = 5\cos(3000t)$$

pour obtenir un signal *modulé*

$$g_3(t) = g_1(t)g_2(t) = 10\cos(200t)\cos(3000t)$$

Calculer le spectre du signal modulé.

On va utiliser la propriété de modulation. On choisit $f(t) = 10\cos(200t)$.

Exemple (2)

On calcule la transformée de Fourier de $f(t)$:

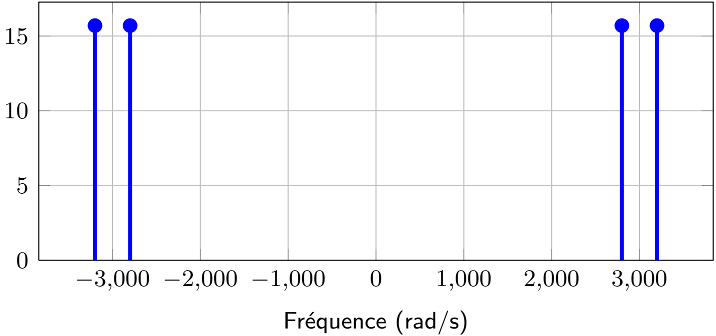
$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = 10\pi(\delta(\omega + 200) + \delta(\omega - 200))$$

Puis on applique la propriété de modulation :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= 10(0.5)\pi(\delta(\omega + 200 - 3000) + \delta(\omega + 200 + 3000) \\ &\quad + \delta(\omega - 200 + 3000) + \delta(\omega - 200 - 3000)) \\ &= 5\pi\left(\delta(\omega - 3200) + \delta(\omega - 2800) + \delta(\omega + 2800) + \delta(\omega + 3200)\right) \end{aligned}$$

Exemple(3)

Le spectre :



Les composantes sont à $\pm(f_1 \pm f_2)$.

Théorème de Parseval

- Le théorème de Parseval permet de faire le lien entre l'énergie d'un signal dans le temps et l'énergie en fonction de la fréquence.
- Puisque la fréquence et le temps sont 2 domaines qui permettent de décrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines.

Théorème de Parseval

Théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega$$

Exemple

Le courant dans une résistance de 40 Ω est $i(t) = 20e^{-2t}\,\mathrm{u}(t)$A. Quel pourcentage de l'énergie totale dissipée dans la résistance provient de la bande $0 < \omega < 2\sqrt{3}$ rad/s ?

L'énergie totale dissipée est :

$$W = R\int_0^\infty i^2(t)\,dt = 40\int_0^\infty 400e^{-4t}\,dt = 4000\ \text{J}$$

On peut le calculer par la série de Fourier.

$$F(\omega) = \frac{20}{2 + j\omega}$$

Exemple (2)

L'amplitude de la série de Fourier est :

$$|F(\omega)| = \frac{20}{\sqrt{4+\omega^2}}$$

et l'énergie totale est :

$$W = \frac{40}{\pi}\int_0^\infty \frac{400}{4+\omega^2}\,d\omega = \frac{16000}{\pi}\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{\omega}{2}\right)\Bigg|_0^\infty = 4000\text{ J}$$

Exemple

L'énergie dans la bande $0 < \omega < 2\sqrt{3}$ rad/s est :

$$W_x = \frac{40}{\pi} \int_0^{2\sqrt{3}} \frac{400}{4+\omega^2}\, d\omega = \frac{16000}{\pi} \left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{\omega}{2} \right) \Bigg|_0^{2\sqrt{3}} = 2666.67 \text{ J}$$

Le pourcentage de l'énergie totale dans cette bande est :

$$\frac{2666.67}{4000} = 66.67\%$$

Densité spectrale d'énergie

- La densité spectrale d'énergie est une mesure de la distribution d'énergie d'un signal en fonction de la fréquence.
- On la calcule selon :

$$E_f = \frac{1}{\pi}|F(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi}F(\omega)F(\omega)^*$$

Densité spectrale de puissance

- La densité spectrale de puissance est une mesure de la distribution de puissance d'un signal en fonction de la fréquence.
- S'applique aux signaux périodiques.
- On la calcule selon :

$$P_f(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} |F_T(\omega)|^2$$

où F_T est la transformée de Fourier d'une période du signal.

Puissance d'un signal

- La puissance d'un signal peut être calculée à partir de la transformée de Fourier :

$$P = \frac{1}{4\pi^2}|F(0)|^2 + \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}|F(n\omega_0)|^2$$

Transformée de Fourier d'un signal périodique

- On peut faire la transformée de Fourier d'un signal périodique.
- Rappel : la série de Fourier d'une fonction périodique est :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

où

$$C_n = \frac{1}{T} \int_T f(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt$$

Transformée de Fourier d'un signal périodique

- On applique la définition de la série de Fourier à la transformée de Fourier :

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right) e^{-j\omega t}\, dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t} e^{-j\omega t}\, dt \end{aligned}$$

- À l'aide de la propriété de linéarité, on obtient :

$$\mathfrak{F}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

Transformée de Fourier d'un signal périodique

- Le spectre d'un signal périodique est une série d'impulsions qui se trouvent à des multiples de la fréquence fondamentale.
- L'amplitude de chaque impulsion est le coefficient de la série de Fourier multiplié par 2π.

Transformée de Fourier d'un signal périodique

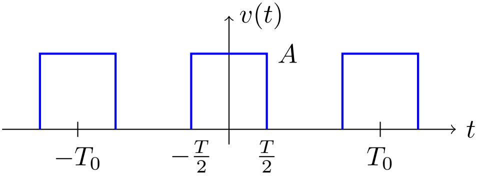
- On peut réarranger l'expression de la transformée de Fourier d'un signal périodique sous une autre forme :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 G(n\omega_0)\delta(\omega - n\omega_0)$$

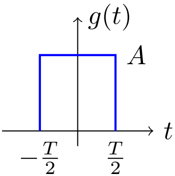
où $G(\omega)$ est la transformée de Fourier d'une période du signal.

Exemple

Faire la transformée de Fourier du signal périodique suivant.



Le signal $g(t)$ est une période de $v(t)$:



La transformée de Fourier de $g(t)$ est :

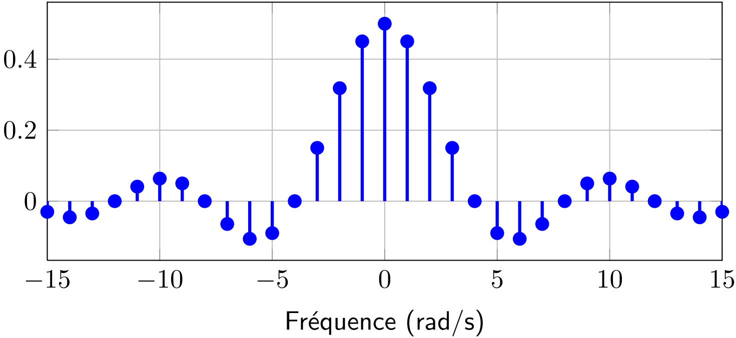
$$G(\omega) = AT\,\mathrm{sinc}(T\omega/2)$$

La transformée de Fourier de $v(t)$ est :

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} AT\omega_0\,\mathrm{sinc}(n\omega_0 T/2)\delta(\omega - n\omega_0)$$

Exemple (2)

Le spectre (si $A = 1$, $T = 0.5$s, $T_0 = 8$s) :



Conclusion

Les points clés de ce chapitre sont :

- Calcul de la transformée de Fourier.
- Utilisation des propriétés de la transformée de Fourier.
- Calcul de la transformée de Fourier de signaux périodiques.