

## Supplément - Chapitre 2

Transformées de Laplace supplémentaires :

TABLEAU 1 – Transformées de Laplace

Transformée	$f(t)$	$F(s)$
1	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}; s >  a $
2	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}; s >  a $
3	$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
4	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
5	$\sin^2(at)$	$\frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$
6	$\sinh^2(at)$	$\frac{2a^2}{s(s^2 - 4a^2)}$
7	$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2}$
8	$e^{bt} \sin(at)$	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$
9	$e^{bt} \cos(at)$	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$

---

## Problèmes

### PROBLÈME 1

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x \leq 2 \\ 3 & x > 2 \end{cases}$$

### PROBLÈME 2

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = 3 + 2x^2$$

### PROBLÈME 3

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = 5 \sin(3x) - 17e^{-2x}$$

### PROBLÈME 4

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = e^{-2x} \sin(5x)$$

### PROBLÈME 5

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = e^{-x} x \cos(2x)$$

### PROBLÈME 6

Calculer la transformée de Laplace de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 2 \\ 4 & x > 2 \end{cases}$$

---

**PROBLÈME 7**

Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes.

1.  $x \cos(3x)$
2.  $x^5 e^{-x}$
3.  $\frac{1}{3} e^{-x/3}$
4.  $e^x \sin(2x)$
5.  $2x + 5 \sin(3x)$
6.  $-\cos(\sqrt{19}x)$
7.  $x^3 + 3 \cos(2x)$
8.  $5e^{2x} + 7e^{-x}$
9.  $2 \cos(3x) - \sin(3x)$

**PROBLÈME 8**

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s}{s+6}$$

**PROBLÈME 9**

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{5s}{(s^2+1)^2}$$

**PROBLÈME 10**

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2-9}$$

**PROBLÈME 11**

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s}{(s-2)^2+9}$$

---

PROBLÈME 12

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s + 4}{s^2 + 4s + 8}$$

PROBLÈME 13

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + 1)}$$

PROBLÈME 14

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s + 3}{(s - 2)(s + 1)}$$

PROBLÈME 15

Calculer la transformée de Laplace inverse de la fonction suivante :

$$F(s) = \frac{s}{s + 6}$$

PROBLÈME 16

Calculer la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes.

1.  $\frac{1}{s^4}$
2.  $\frac{-2}{s - 2}$
3.  $\frac{1}{2s - 3}$
4.  $\frac{12}{3s + 9}$
5.  $\frac{s}{(s + 1)^2 + 5}$

- 
6.  $\frac{s+3}{s^2+3s+5}$
7.  $\frac{s+2}{s^3}$
8.  $\frac{1}{s^2+4}$
9.  $\frac{1}{s^2-2s+2}$
10.  $\frac{2s+1}{(s-1)^2+7}$
11.  $\frac{3s^2}{(s^2+1)^2}$

**PROBLÈME 17**

Linéariser la fonction suivante au point  $x = 0$ .

$$f(x) = e^{-x}$$

**PROBLÈME 18**

Linéariser la fonction suivante au points  $x = 0$ ,  $x = \pi/2$  et  $x = \pi$ .

$$f(x) = \cos x$$

**PROBLÈME 19**

Linéariser la fonction suivante au point  $x = 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

## Matlab

Quelques commandes Matlab utiles :

### Construction d'un polynôme

On peut construire un polynôme de deux façons : a) en spécifiant les racines, ou b) en écrivant les coefficients.

---

Ex :  $s(s+1)(s+4)$

```
>> a = poly([0 -1 -4])  
a =
```

```
1 5 4 0
```

ou, si le polynôme est connu,  $(s^3 + 5s^2 + 4s)$

```
>> a = [1 5 4 0];
```

### Racines d'un polynôme

Ex :  $s^2 + 2s + 5$

```
>> A = [1 2 5];  
>> roots(A)  
ans =
```

```
-1.0000 + 2.0000i  
-1.0000 - 2.0000i
```

### Multiplication de polynômes

Ex :  $(s+3)(s^2+5s+2)$

```
>> a = [1 3];  
>> b = [1 5 2];  
>> conv(a,b)  
ans =
```

```
1 8 17 6
```

Ce qui donne le polynôme  $(s^3 + 8s^2 + 17s + 6)$

---

## Expansion en fractions partielles

On peut faire l'expansion en fractions partielles à l'aide de la commande `residue`.  
Soit :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

On sait déjà que ceci est équivalent à :

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

À l'aide de Matlab,

```
>> num = [2];  
>> den = poly([-1 -2]);  
>> [K,p,k] = residue(num,den)
```

K =

```
    -2  
     2
```

p =

```
    -2  
    -1
```

k =

```
    []
```

$K$  représente les constantes : -2 et 2,  $p$  représente les racines du dénominateur, et  $k$  est le reste, qui est nul dans ce cas.