Chapitre 10

Étude des systèmes par équations d'état

Jusqu'à présent, on a modélisé le comportement des systèmes à l'aide de fonctions de transfert, en utilisant la transformée de Laplace.

Principalement, le désavantage de cette méthode est qu'elle n'est valide que pour des systèmes linéaires invariables. Un avantage majeur, par contre, est que ces fonctions de transfert donnent rapidement de l'information sur la stabilité et la réponse transitoire.

Avec le développement de systèmes plus complexes, les approximations de systèmes linéaires ne sont plus valides. Il faut une méthode plus robuste pour faire l'analyse. On doit aussi avoir une méthode qui peut facilement analyser plusieurs entrées et plusieurs sorties.

10.1 Définition

On va démontrer, à l'aide d'un exemple de circuit électrique, que pour un système à plusieurs variables, des équations différentielles ne sont nécessaires que pour résoudre un sous-ensemble des variables du système.

Les autres variables peuvent alors être calculée à partir de ce sous-ensemble.

On a donc la procédure suivante :

1. Choisir un sous-ensemble de toutes les variables possibles du système. On appelle ce sous-ensemble les *variables d'état*.
2. Pour un système d'ordre n, on écrit n équations différentielles de premier ordre. On appelle ce groupe d'équations les *équations d'état*.

3. Si on connaît les conditions initiales de toutes les variables d'état à t_0, et l'entrée du système pour $t \geq t_0$, on peut solutionner les équations d'état.
4. On combine les variables d'état avec l'entrée au système pour trouver toutes les autre variables.
5. Les équations d'état et les équations de sortie forment une représentation valide du système. On appelle cette représentation *l'espace d'état* ("state-space").

Exemple 1

Soit le circuit suivant :

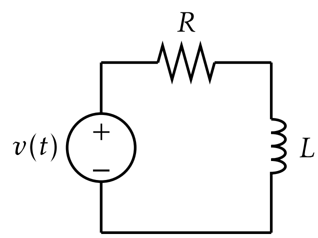


Figure 10.1 – Circuit RL

Le courant initial est $i(0)$. Analyser le circuit.

---

1. On choisit le courant $i(t)$ comme variable à trouver.

2. L'équation est :

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t) \tag{10.1}$$

3. On prend la transformée de Laplace :

$$L[sI(s) - i(0)] + RI(s) = V(s) \tag{10.2}$$

Si l'entrée est un échelon unitaire, $V(s) = 1/s$, et on isole pour $I(s)$:

$$I(s) = \frac{1}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right) + \frac{i(0)}{s+\frac{R}{L}} \tag{10.3}$$

et donc

$$i(t) = \frac{1}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right) + i(0)e^{-(R/L)t} \tag{10.4}$$

$\Rightarrow$ $i(t)$ est un sous-ensemble de toutes les variables possibles du circuit, et donc si on connaît $i(0)$ et $v(t)$, on peut trouver les autres variables. $i(t)$ est une variable d'état, et l'équation 10.1 est une équation d'état.

4. On peut trouver le reste des variables en fonction de $i(t)$ et $v(t)$. Soit :

$$\left.\begin{array}{l} v_R(t) = Ri(t) \\ v_L(t) = v(t) - v_R(t) = v(t) - Ri(t) \\ \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}[v(t) - Ri(t)] \end{array}\right\} \text{Équations de sortie} \tag{10.5}$$

L'équation 10.1 et les équations de sortie forment l'espace d'état.

EXEMPLE 2

Soit le circuit suivant :

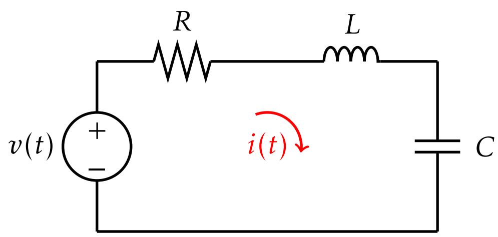


FIGURE 10.2 – Circuit RLC

Le courant initial est $i(0)$. Analyser le circuit.

---

1. Le système est de deuxième ordre : il faut 2 équations différentielles pour trouver les deux variables d'état. On choisit $i(t)$ et $q(t)$, la charge au condensateur.

2. Les équations sont :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i dt = v(t) \tag{10.6}$$

ou, puisque $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$,

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t) \tag{10.7}$$

On peut convertir l'équation 10.7 en deux équations différentielles de premier ordre en fonction de $i(t)$ et $q(t)$:

$$\frac{dq}{dt} = i \tag{10.8}$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}v(t) \tag{10.9}$$

3. On peut résoudre ces équations en utilisant la transformée de Laplace, si on connaît les conditions initiales et l'entrée.

4. Avec $i(t)$ et $q(t)$, on peut trouver toutes les autre variables. Par exemple,

$$v_L(t) = -\frac{1}{C}q(t) - Ri(t) + v(t) \tag{10.10}$$

L'équation $v_L(t)$ est une équation de sortie, et est une combinaison linéaire des variables d'état.

On aurait aussi pu choisir $v_R(t)$ et $v_C(t)$ comme variables d'état.

Y a-t-il des restrictions quand au choix des variables d'état ?

$\rightarrow$ Oui. Aucune variable d'état ne peut être une combinaison linéaire des autres variables d'état. Ex : Si $v_R(t)$ est choisie comme variable d'état, on ne peut pas choisir $i_R(t)$, puisque $v_R(t) = Ri_r(t)$.

On peut écrire les équations d'état et de sortie sous forme matricielle.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \qquad \text{(équation d'état)} \tag{10.11}$$

où

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \qquad u = v(t) \tag{10.12}$$

et

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}u \qquad \text{(équation de sortie)} \tag{10.13}$$

où

$$\mathbf{y} = v_L(t) \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \\ -R \end{bmatrix}^T \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} q \\ i \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad u = v(t) \tag{10.14}$$

Les équations 10.11 et 10.13 forment l'espace d'état.

10.2 Application de la méthode

Pour représenter un système par des équations d'état, il faut savoir :

1. Le nombre minimum de variables d'état nécessaire.
2. Les variables d'état doivent être linéairement indépendantes.

Nombre minimum de variables d'état

Typiquement, le nombre minimum est l'ordre de l'équation différentielle qui décrit le système. Du point de vue d'une fonction de transfert, c'est l'ordre du dénominateur. On peut aussi compter le nombre d'éléments indépendants qui emmagasinent de l'énergie.

Linéairement indépendantes

Il ne faut pas qu'une variable d'état soit une combinaison linéaire de d'autre variables d'état. Ex : Si on choisit 3 variables x_1, x_2 et x_3, mais si $x_3 = 2x_1 + 5x_2$, alors x_3 n'est pas indépendante de x_1 et x_2, puisque si on connaît la valeur de x_1 et x_2, on peut trouver x_3. Par contre, si $x_3 = 5\frac{dx_1}{dt}$, x_3 est alors linéairement indépendante.

10.3 Conversion de fonction de transfert à espace d'état

Une méthode pour convertir une fonction de transfert à un espace d'état : la méthode des *variables de phase*.

Soit une équation différentielle :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = b_0 u \tag{10.15}$$

ou, sous forme différentielle,

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 = b_0 u \tag{10.16}$$

On choisit la sortie $y(t)$ et les $(n-1)$ dérivées comme variables d'état. Donc :

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{dy}{dt} \\ &\vdots \\ x_n &= \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{aligned} \tag{10.17}$$

puis, on dérive de chaque côté :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{dy}{dt} \\
\dot{x}_2 &= \frac{d^2y}{dt^2} \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \frac{d^ny}{dt^n}
\end{aligned} \tag{10.18}$$

En combinant les équations 10.16, 10.17 et 10.18, on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 \cdots - a_{n-1}x_n + b_0u
\end{aligned} \tag{10.19}$$

Sous forme matricielle,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & & & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \tag{10.20}$$

et la sortie,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} \tag{10.21}$$

$\boxed{\text{Exemple 3}}$

Convertir la fonction de transfert suivante en espace d'état :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24}$$

On a $(s^3+9s^2+26s+24)C(s) = 24R(s)$. En forme différentielle, si les conditions initiales sont nulles :

$$\dddot{c} + 9\ddot{c} + 26\dot{c} + 24c = 24r$$

Les variables d'état sont :

$$\begin{aligned} x_1 &= c \\ x_2 &= \dot{c} \\ x_3 &= \ddot{c} \end{aligned}$$

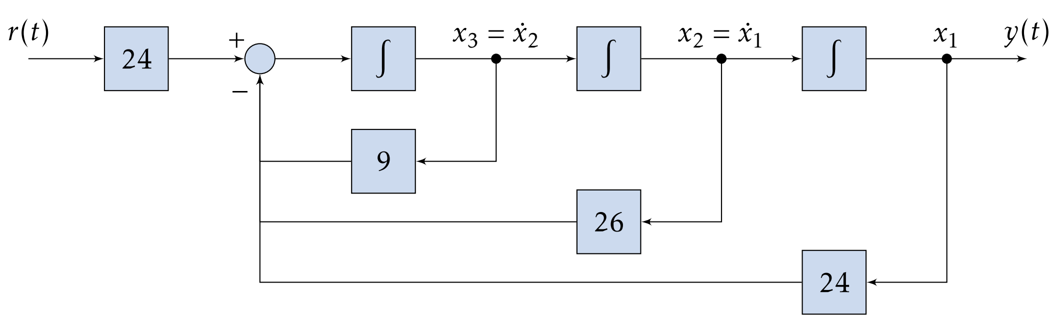
Les équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -24x_1 - 26x_2 - 9x_3 + 24r \\ y &= c = x_1 \end{aligned}$$

En forme de matrices :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On peut représenter ce système par un schéma bloc. On trace en premier les trois blocs d'intégration, puis on relie le tout avec les gains appropriés.



Si l'ordre du numérateur est plus petit que l'ordre du dénominateur, on peut séparer la fonction de transfert en deux termes ; le premier est le dénominateur, et le deuxième est le numérateur, comme montré à la figure 10.3. Le dénominateur de la fonction de transfert représente les équations d'état, tandis que le numérateur représente l'équation de sortie.

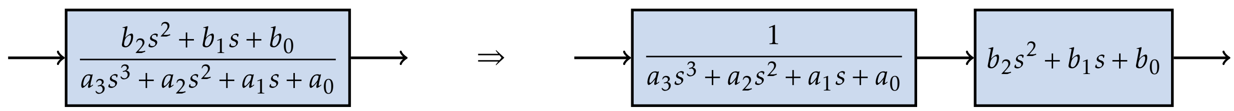


FIGURE 10.3 – Séparation d'une fonction de transfert

10.4 Conversion d'espace d'état à fonction de transfert

On peut faire la conversion d'un système d'espace d'état à une fonction de transfert. Soit les équations d'état :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{10.22}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{10.23}$$

On applique la transformée de Laplace de chaque côté, et avec des conditions initiales nulles :

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{10.24}$$
$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{10.25}$$

Si on isole $\mathbf{X}(s)$ dans l'équation 10.24, on obtient :

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{10.26}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité. En substituant l'équation 10.26 dans l'équation 10.25, on obtient :

$$\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\mathbf{U}(s) \tag{10.27}$$

et la fonction de transfert du système est donc :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{10.28}$$

EXEMPLE 4

Calculer la fonction de transfert du système suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

On utilise l'équation 10.28 pour calculer la fonction de transfert :

$$s\mathbf{I}-\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

Et ensuite on inverse :

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} = \frac{\begin{bmatrix} (s^2+3s+2) & s+3 & 1 \\ -1 & s(s+3) & s \\ -s & -(2s+1) & s^2 \end{bmatrix}}{s^3+3s^2+2s+1}$$

Finalement, on substitue les éléments suivants dans l'équation 10.28 :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

pour trouver la fonction de transfert suivante :

$$T(s) = \frac{10(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+2s+1}$$

10.5 Représentation des systèmes d'état

Il y a plusieurs façons de représenter des systèmes d'état par des diagrammes de fluences. Les différentes représentations ont des avantages ; elles permettent de mieux découpler les équations différentielles, ou de mieux convertir le système global à plusieurs sous-systèmes.

10.5.1 Forme cascade

Les systèmes d'état sont souvent représentés par des variables de phase (où chaque variable d'état est la dérivée de la variable précédente). Soit le système suivant :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)} \tag{10.29}$$

La figure 10.5 montre une représentation en diagrammes bloc du système précédent, où les termes de la fonction de transfert sont en cascade. La sortie de chaque système de premier ordre est une variable d'état (ce ne sont pas les variables de phase).

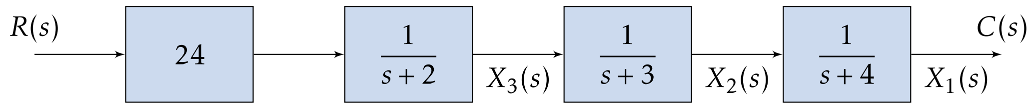


Figure 10.4 – Représentation d'un système en cascade

On va maintenant démontrer comment le graphe de fluence peut être utilisé pour obtenir une représentation en espace d'état pour le système. Soit un système de premier ordre de la forme :

$$\frac{C_i(s)}{R_i(s)} = \frac{1}{s+a_i} \tag{10.30}$$

qu'on peut écrire sous une autre forme :

$$(s+a_i)C_i(s) = R_i(s) \tag{10.31}$$

et à l'aide de la transformée inverse de Laplace,

$$\frac{dc_i(t)}{dt} = -a_i c(t) + r_i(t) \tag{10.32}$$

Cette équation est représentée dans le diagramme de la figure

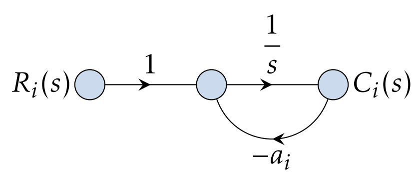


Figure 10.5 – Représentation d'un système en cascade

On peut appliquer cette méthode au système de l'équation 10.29 ; on obtient le diagramme de fluence de la figure 10.6.

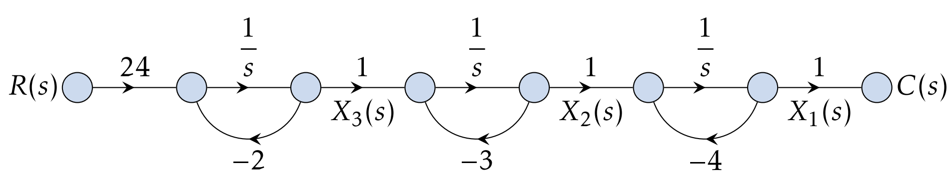


Figure 10.6 – Représentation d'un système en cascade

À partir de la figure 10.6, on peut rapidement écrire les équations d'état du système. Puisque le terme $1/s$ représente un intégrateur, le noeud avant cet intégrateur représente la dérivée de la variable, et donc une variable d'état. Pour le diagramme de fluence de la figure 10.6, on obtient :

$$\begin{array}{rcllll} \dot{x}_1 & = & -4x_1 & +x_2 & & \\ \dot{x}_2 & = & & -3x_2 & +x_3 & \\ \dot{x}_3 & = & & & -2x_3 & +24r \end{array} \tag{10.33}$$

et l'équation de sortie est :

$$y = c(t) = x_1 \tag{10.34}$$

Sous forme d'espace d'état, on obtient :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix} r \tag{10.35}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{10.36}$$

Cette forme de représentation permet d'extraire rapidement de l'information à propos du système. Premièrement, la matrice **B** est la matrice des entrées. La matrice **C** est la matrice des sorties. La matrice **A** est la matrice du système ; les pôles du système sont donnés dans la diagonale.

10.5.2 Forme parallèle

La forme parallèle est une autre forme de représentation des systèmes d'état. Cette forme permet d'avoir une matrice **A** purement diagonale, s'il n'y a pas de racines répétées. On reprend le même système qu'auparavant, mais cette fois on décompose à l'aide de fractions partielles.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24}{(s+2)(s+3)(s+4)} = \frac{12}{s+2} - \frac{24}{s+3} + \frac{12}{s+4} \tag{10.37}$$

Sous cette forme, on voit bien que la sortie est la somme de trois termes qui multiplient l'entrée. La représentation à l'aide de diagramme de fluence est donnée à la figure 10.7.

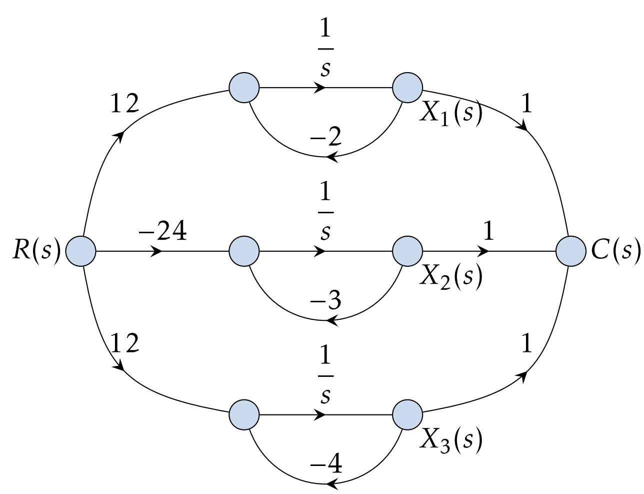


Figure 10.7 – Représentation d'un système en parallèle

On peut utiliser le diagramme de fluence pour écrire les équations d'état. Par inspection,

$$\begin{array}{rclccc} \dot{x}_1 & = & -2x_1 & & & +12r \\ \dot{x}_2 & = & & -3x_2 & & -24r \\ \dot{x}_3 & = & & & -4x_3 & +12r \end{array} \tag{10.38}$$

et l'équation de sortie est :

$$y = c(t) = x_1 + x_2 + x_3 \tag{10.39}$$

Sous forme matricielle,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 12 \\ -24 \\ 12 \end{bmatrix} r \tag{10.40}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{10.41}$$

L'avantage de cette représentation du système est qu'il permet d'avoir une matrice de système, $\mathbf{A}$, qui est uniquement diagonale. Chaque équation différentielle n'est fonction que d'une seule variable : elles peuvent être solutionnées indépendamment. Un système ayant ces propriétés est dit *découplé*.

Si le système a des racines répétées, la matrice du système ne sera pas diagonale. Soit le système suivant :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s+3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} \tag{10.42}$$

Le diagramme de fluence est donné à la figure 10.8.

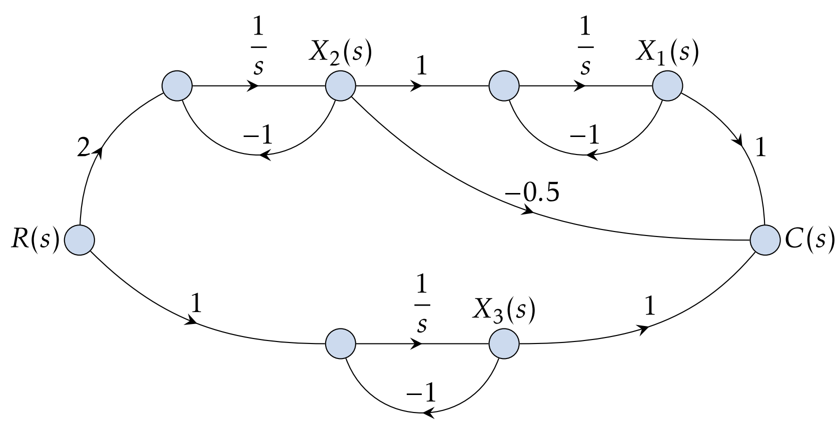


FIGURE 10.8 – Représentation d'un système en parallèle avec racine répétées

Par inspection, les équations du système sont :

$$\begin{array}{rclccc} \dot{x}_1 & = & -x_1 & +x_2 & & \\ \dot{x}_2 & = & & -x_2 & & -2r \\ \dot{x}_3 & = & & & -2x_3 & +r \end{array} \tag{10.43}$$

et l'équation de sortie est :

$$y = c(t) = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_3 \tag{10.44}$$

Sous forme matricielle,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10.45}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \tag{10.46}$$

Il y a un terme additionnel dans la matrice **A**, à cause de la racine répétée. Les pôles du système sont quand même dans la diagonale.

10.5.3 Forme canonique de contrôleur

Une autre méthode de représentation utilisant les variables de phase est la forme canonique de contrôleur, puisqu'elle est basée sur le design de contrôleurs (qu'on verra dans un autre chapitre). Sous cette forme, les variables de phase sont organisées en ordre inverse.

Comme exemple, on prend le système suivant :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{s^2 + 7s + 2}{s^3 + 9s^2 + 26s + 24} \tag{10.47}$$

qu'on peut représenter par variables de phase de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10.48}$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{10.49}$$

On inverse l'ordre des variables de phase de la **A** et **C** :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -24 & -26 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10.50}$$

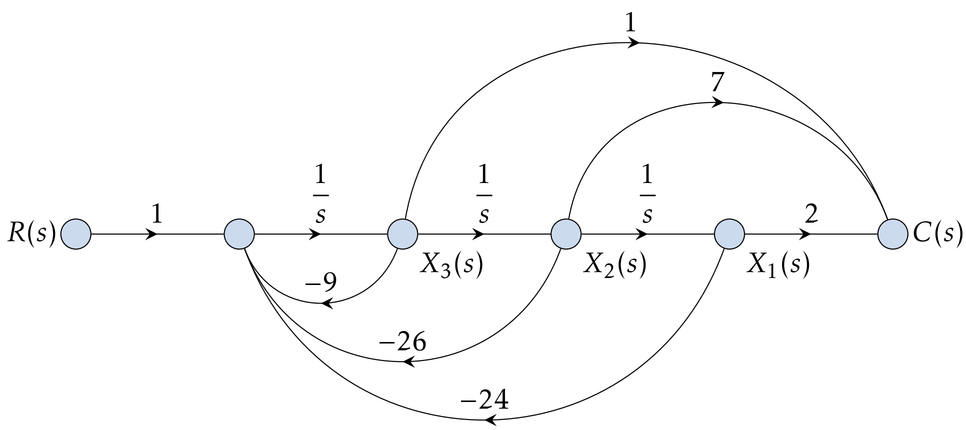
$$y = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{10.51}$$

Puis on réarrange les variables de phase en ordre croissant :

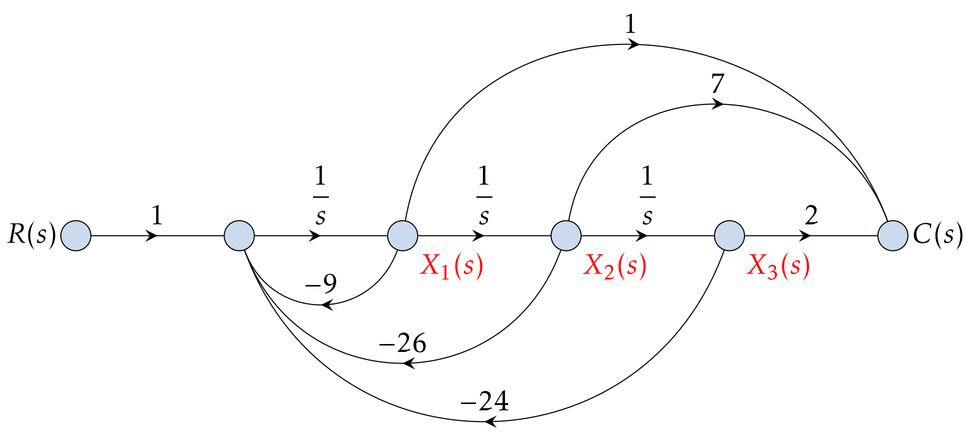
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -26 & -24 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r \tag{10.52}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{10.53}$$

La figure montre le diagramme de fluence sous la forme des variables de phase et de contrôleur canonique.



a) Représentation avec variables de phase



b) Représentation contrôleur canonique

FIGURE 10.9 – Diagramme de fluence d'un système d'état a) sous forme variable de phase et b) sous forme contrôleur canonique

10.6 Stabilité

On peut démontrer que la stabilité d'un système est obtenue à partir de :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{10.54}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité et s l'opérateur de Laplace. On résout l'équation obtenue par la méthode de Routh-Hurwitz.

EXEMPLE 5

Soit :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Calculer la stabilité.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant est :

$$s^3 - 6s^2 - 7s - 52$$

Table de Routh :

$$\begin{array}{lcc} s^3 & 1 & -7 \\ s^2 & \cancel{-6} - 3 & \cancel{-52} - 26 \\ s^1 & \cancel{-15.67} - 1 & 0 \\ s^0 & -26 & 0 \end{array}$$

Le système est instable.

10.7 Erreur statique

Il y a deux méthodes principales pour calculer l'erreur statique d'un système d'état : l'utilisation du théorème de la valeur finale, et la méthode de substitution.

10.7.1 Analyse selon le théorème de la valeur finale

L'erreur statique peut être obtenue par l'équation suivante :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} sR(s)[1 - \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] \tag{10.55}$$

pour un système où

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{10.56}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.57}$$

EXEMPLE 6

Soit un système :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Calculer l'erreur statique due à une entrée échelon et rampe.

On a :

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+5 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ -20 & 10 & s-1 \end{bmatrix}$$

Il faut maintenant trouver l'inverse de la matrice. L'inverse d'une matrice $\mathbf{U}$ est :

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{U}}{\det\mathbf{U}}$$

La matrice adjointe de $(\mathbf{sI}-\mathbf{A})$:

$$\operatorname{adj}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s^2+s+8 & 20 & 20s+40 \\ s-1 & s^2-4s-5 & -10s-30 \\ 1 & s+5 & s^2+7s+10 \end{bmatrix}$$

et le déterminant :

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20$$

On obtient, en multipliant les matrices appropriées :

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s\to 0} sR(s)\left(1 - \frac{s+4}{s^3+6s^2+13s+20}\right) \\ &= \lim_{s\to 0} sR(s)\left(\frac{s^3+6s^2+12s+16}{s^3+6s^2+13s+20}\right) \end{aligned}$$

Pour une entrée échelon,

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s^3+6s^2+12s+16}{s^3+6s^2+13s+20}\right) = 0.8$$

Pour une entrée rampe,

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\left(\frac{s^3+6s^2+12s+16}{s^3+6s^2+13s+20}\right) = \infty$$

10.7.2 Méthode de substitution

Soit un système de la forme :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{10.58}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.59}$$

Si l'entrée est un échelon unitaire, alors $r = 1$, et une solution en régime permanent pour $\mathbf{x}$ est :

$$\mathbf{x_{ss}} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} = \mathbf{V} \tag{10.60}$$

où V_i est une constante. En régime permanent, les dérivées sont nulles ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$). Si on substitue dans les équations 10.58 et 10.59, on obtient :

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}\mathbf{V} + \mathbf{B} \tag{10.61}$$

$$y_{ss} = \mathbf{C}\mathbf{V} \tag{10.62}$$

où y_{ss} est la valeur en régime permanent. Si on solutionne pour $\mathbf{V}$,

$$\mathbf{V} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{10.63}$$

si la matrice $\mathbf{A}$ est inversable.

L'erreur statique est la différence entre l'entrée et la sortie, ce qui donne :

$$e(\infty) = 1 - y_{ss} = 1 - \mathbf{C}\mathbf{V} = 1 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{10.64}$$

On peut faire un raisonnement semblable pour une entrée rampe.

10.8 Design de contrôleurs

Le design de contrôleurs dans l'espace d'état permet de spécifier complètement les pôles d'un système, pour obtenir la réponse temporelle voulue. Cependant, elle ne permet pas de spécifier les zéros d'un système ; c'est un désavantage, puisque les zéros peuvent modifier la réponse transitoire.

Pour un système ayant une fonction de transfert dont le dénominateur est de la forme :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{10.65}$$

Il y a n coefficients qui déterminent les pôles du système. Pour modifier la réponse, il faut trouver n paramètres ajustables.

10.8.1 Placement des pôles

Soit un système représenté par l'espace d'état suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{10.66}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.67}$$

La représentation de ce système est donnée à la figure 10.10, où les lignes minces sont des scalaires, et les lignes épaisses sont des vecteurs.

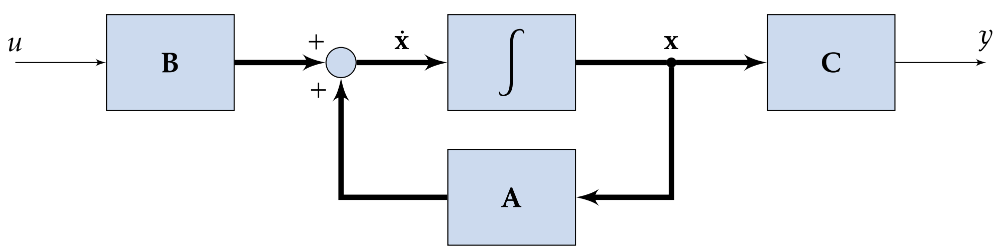


Figure 10.10 – Représentation d'un système en espace d'état

Dans un système de contrôle typique, la sortie y est branchée à la jonction de sommation pour fournir du feedback. Pour les contrôleurs à placement de pôles, on modifie la topologie du feedback. Au lieu d'utiliser y pour le feedback, on utilise toutes les variables d'état. Chaque variable d'état est modifiée par un gain k_i, de sorte que les n variables d'état deviennent de paramètres contrôlables. Cette représentation est montrée à la figure 10.11, où les gains sont représentés par un vecteur de feedback $-\mathbf{K}$.

Les équations d'état du système de la figure 10.11 en boucle fermée sont :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}(-\mathbf{K}\mathbf{x} + r) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}r \tag{10.68}$$

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.69}$$

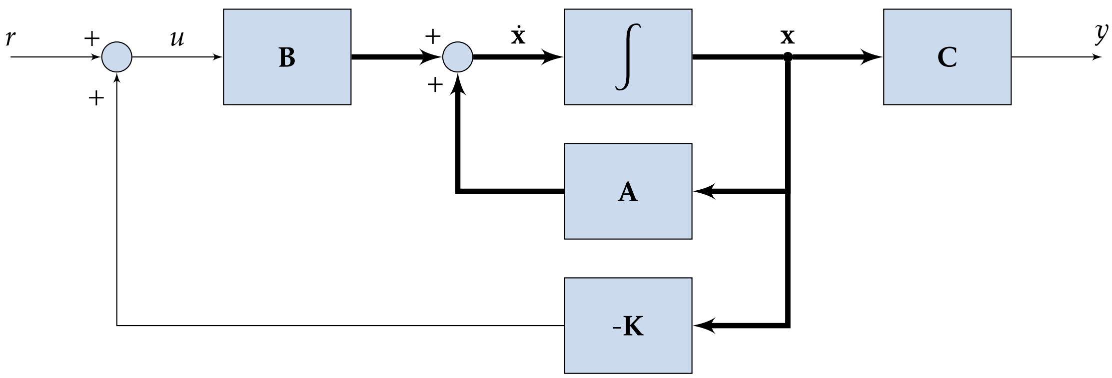


Figure 10.11 – Représentation d'un système en espace d'état avec feedback des variables d'état

L'implémentation pratique du système avec feedback de la figure 10.11 est montré à la figure 10.12. Le diagramme de fluence de la figure 10.12a montre un diagramme de fluence sous forme de variables de phase. Chaque variable d'état est ensuite branchée à l'entrée u à travers un gain k_i, comme à la figure 10.12b.

Le design de systèmes à variables d'état avec feedback pour le placement des pôles consiste à comparer l'équation du système obtenue lorsque le système est de la forme de la figure 10.12b avec l'équation caractéristique voulue, puis en calculant les gains k_i. Si le système n'est pas de la forme des variables de phase, la solution des équations est très complexe ; il est préférable de modifier la forme du système avant de déterminer les pôles.

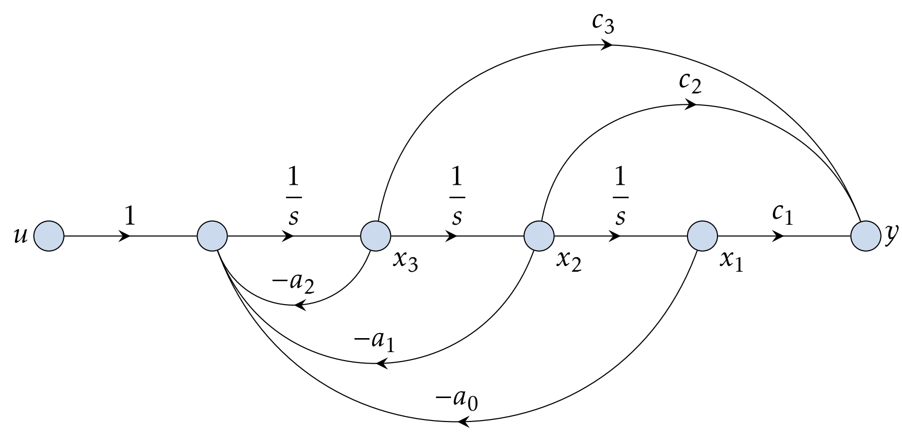
10.8.2 Placement des pôles des systèmes en variables de phase

Pour appliquer la méthode de design par placement de pôles, on utilise les étapes suivantes :

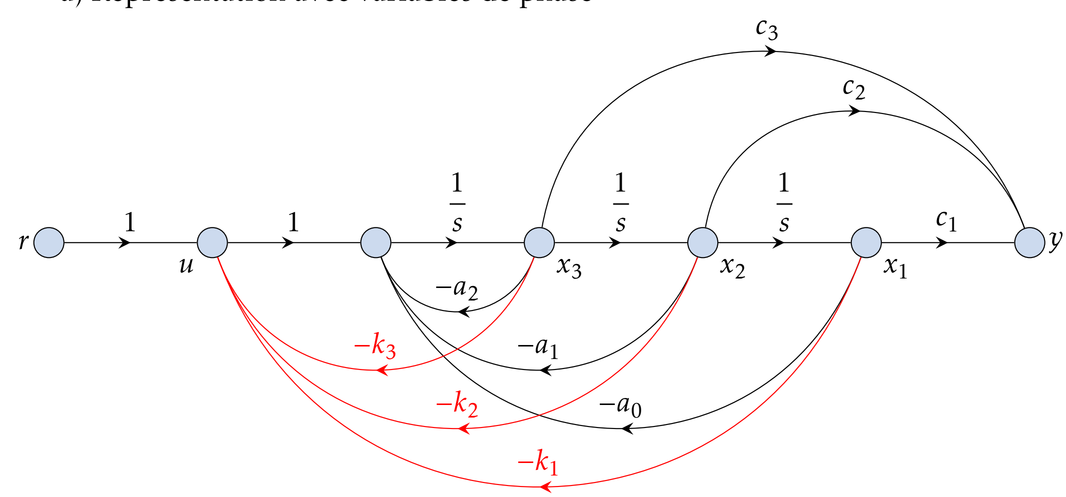
1. Représenter le système sous la forme des variables de phase.
2. Ajouter du feedback à chaque variable de phase, avec un gain k_i.
3. Calculer l'équation caractéristique du système en boucle fermée.
4. Déterminer la position des pôles voulues et calculer une équation caractéristique équivalente.
5. Résoudre les deux équations caractéristiques pour obtenir les gains k_i.

La représentation en variables de phase pour le système donné par les équations 10.66 et 10.67 est :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \tag{10.70}$$



a) Représentation avec variables de phase



b) Système avec feedback des variables de phase

FIGURE 10.12 – Diagramme de fluence d'un système d'état a) sous forme variable de phase et b) avec feedback

L'équation caractéristique du système est donc :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{10.71}$$

On ajoute maintenant le feedback, de sorte que :

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} \tag{10.72}$$

où

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} \tag{10.73}$$

Pour le système avec feedback, la matrice du système en boucle fermée est :

$$\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(a_0+k_1) & -(a_1+k_2) & -(a_2+k_3) & \cdots & -(a_{n-1}+k_n) \end{bmatrix} \tag{10.74}$$

et son équation caractéristique est :

$$s^n+(a_{n-1}+k_n)s^{n-1}+\cdots+(a_1+k_2)s+(a_0+k_1)=0 \tag{10.75}$$

Si l'équation caractéristique voulue est :

$$s^n+d_{n-1}s^{n-1}+\cdots+d_1s+d_0=0 \tag{10.76}$$

il suffit de calculer :

$$d_i=a_i+k_{i+1} \quad i=0,1,\ldots,n-1 \tag{10.77}$$

et donc :

$$k_{i+1}=d_i-a_i \tag{10.78}$$

Exemple 7

Soit le système suivant :

$$G(s)=\frac{20(s+5)}{s(s+1)(s+4)}$$

Faire la conception d'un régulateur à variables de phase pour obtenir un dépassement de 9.5% et un temps de stabilisation de 0.74s.

Selon la réponse transitoire voulue, on calcule les pôles voulus. Pour un dépassement de 9.5%, on obtient :

$$\zeta=\frac{-\ln(0.095)}{\sqrt{\pi^2+\ln^2(0.095)}}=0.6$$

et

$$\omega_n=\frac{4}{T_s\zeta}=9.015 \text{ rad/s}$$

Les pôles de ce système voulu sont :

$$s_{1,2}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-5.4\pm j7.2$$

Puisque le système $G(s)$ est de troisième ordre, on doit choisir un autre pôle. Puisqu'il y a un zéro à -5, on choisit le troisième pôle pour éliminer ce zéro. Dans ce cas-ci, pour démontrer les concepts, on choisit un pôle à -5.1. Le diagramme de fluence du système est montré à la figure 10.13.

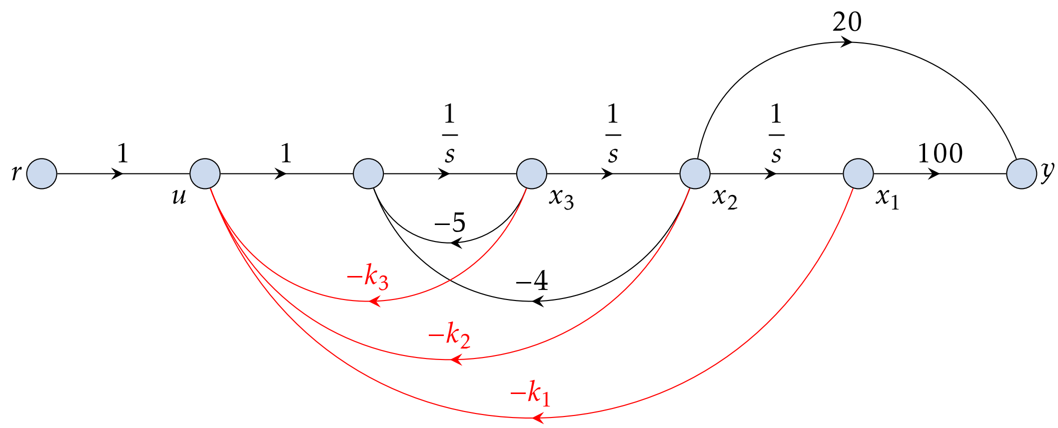


FIGURE 10.13 – Diagramme de fluence de l'exemple 7 avec feedback

La matrice du système en boucle fermée est :

$$\mathbf{A}-\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -k_1 & -(4+k_2) & -(5+k_3)\end{bmatrix}$$

L'équation caractéristique est :

$$\det(s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{BK}))=s^3+(5+k_3)s^2+(4+k_2)s+k_1=0$$

qui doit être semblable à :

$$(s+5.4+j7.2)(s+5.4-j7.2)(s+5.1)=s^3+15.9s^2+136.08s+413.1=0$$

Par inspection,

$$k_1=413.1\quad k_2=132.08\quad k_3=10.9$$

La représentation en espace d'état pour le système est :

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -413.1 & -136.08 & -15.9\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}r$$

$$y=\begin{bmatrix}100 & 20 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

ce qui donne la fonction de transfert :

$$T(s)=\frac{20(s+5)}{s^3+15.9s^2+136.08s+413.1}$$

La réponse est montrée à la figure 10.14.

L'erreur statique est quand même assez grande (0.76) ; une méthode de design pour réduire cette erreur sera montrée plus loin.

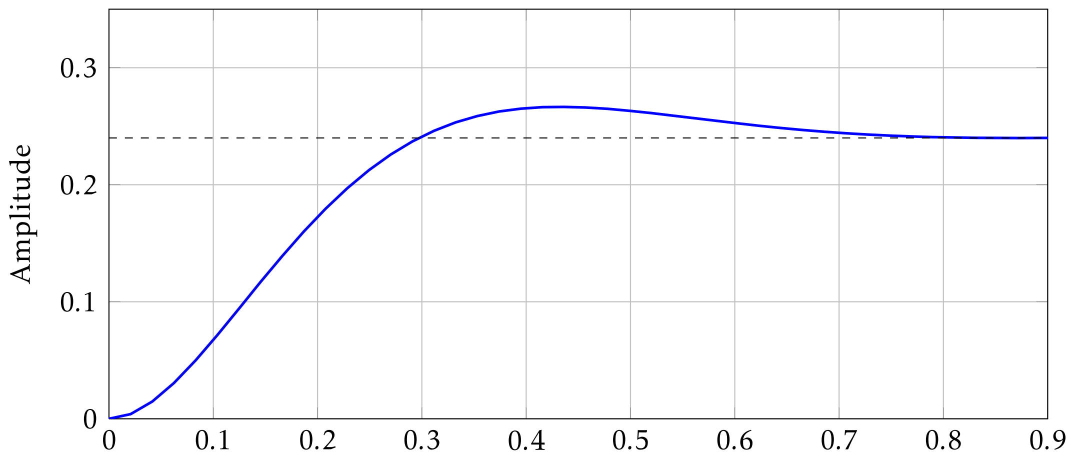


FIGURE 10.14 – Simulation du système modifié

10.8.3 Contrôlabilité

Bien que la méthode précédente semble fonctionner pour tous les systèmes, en réalité ce n'est pas le cas. On va vérifier les conditions qui doivent exister pour qu'un système soit contrôlable. Pour qu'un système soit être contrôlé, on a vu qu'il faut n paramètres. Le signal de contrôle u doit être en mesure de contrôler chaque variable d'état x. Si n'importe quelle variable d'état x_i ne peut pas être contrôlée par le signal u, on ne peut pas placer tous les pôles du système où on veut. Ce qui se résume à :

> Si une entrée à un système peut être obtenue qui prend chaque variable d'état d'un état initial à un état final voulu, le système est contrôlable ; sinon, le système ne peut pas être contrôlé.

La technique de placement des pôles est seulement vaide pour un système contrôlable.

Un système d'ordre n ayant une équation d'état de la forme

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{10.79}$$

sera complètement contrôlable si la matrice

$$\mathbf{C_M} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{10.80}$$

est de rang n, où $\mathbf{C_M}$ est la matrice de contrôlabilité. On peut tester en calculant le déterminant : si le déterminant d'une matrice est non-nul, la matrice est non-singulière. Le rang d'une matrice $n \times n$ non-singulière est n. En d'autres mots, si $\det(\mathbf{C_M}) \neq 0$, le système est contrôlable.

10.8.4 Transformation de système

Une autre méthode de faire le contrôle d'un système, qui n'est pas sous la forme des variables de phase, est de transformer le système actuel à un système en variables de phase. On utilise la matrice de contrôlabilité pour faire la transformation.

Soit un système qui n'est pas sous la forme de variables de phase,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}u \tag{10.81}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{10.82}$$

ayant une matrice de contrôlabilité

$$\mathbf{C_{Mz}} = \begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{10.83}$$

On suppose que le système peut être transformé sous forme de variables de phase ($\mathbf{x}$) à l'aide d'une transformation linéaire

$$\mathbf{z} = \mathbf{P}\mathbf{x} \tag{10.84}$$

Si on substitue, on obtient un nouveau système :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u \tag{10.85}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{10.86}$$

ayant une matrice de contrôlabilité :

$$\mathbf{C_{Mx}} = \mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} \tag{10.87}$$

Si on substitue l'équation 10.83 dans l'équation 10.87, on obtient

$$\mathbf{P} = \mathbf{C_{Mz}}\mathbf{C_{Mx}}^{-1} \tag{10.88}$$

On peut donc trouver la matrice de transformation à partir des matrices de contrôlabilité.

Après avoir transformé le système à des variables de phase, on peut faire la conception des gains. L'entrée u devient :

$$u = -\mathbf{K_x}\mathbf{x} + r \tag{10.89}$$

Le système est alors :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{K_x})\mathbf{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}r \tag{10.90}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{x} \tag{10.91}$$

Puisque cette équation est sous la forme de variables de phase, les zéros de ce système en boucle fermée sont donnés par les éléments de la matrice $\mathbf{CP}$.

En utilisant $\mathbf{x} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{z}$, on transforme le système de variables de phase à sa représentation originale et obtenir :

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K_x}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{z} + \mathbf{B}r \tag{10.92}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{z} \tag{10.93}$$

En comparant l'équation 10.92 et 10.68, on remarque que :

$$\mathbf{K_z} = \mathbf{K_x}\mathbf{P}^{-1} \tag{10.94}$$

On démontre ces concepts à l'aide d'un exemple.

Exemple 8

Faire la conception d'un contrôleur pour obtenir 20.8% de dépassement et un temps de stabilisation de 2s pour le système suivant :

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

qui est donné sous la forme cascade.

Le diagramme de fluence est donné à la figure 10.15.

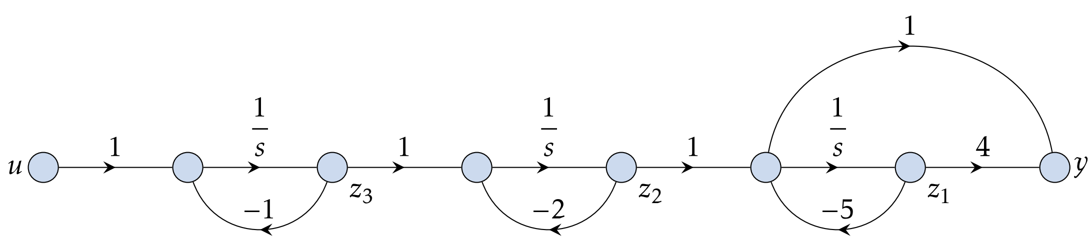


Figure 10.15 – Diagramme de fluence de l'exemple 8

On peut maintenant écrire les équations d'état de ce système :

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A_z} + \mathbf{B_z}u = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \mathbf{C_z}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

La matrice de contrôlabilité est :

$$\mathbf{C_{Mz}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_z} & \mathbf{A_z}\mathbf{B_z} & \mathbf{A_z^2}\mathbf{B_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Et puisque le déterminant de $\mathbf{C_{Mz}} = -1$, le système est contrôlable.

On convertit le système à des variables de phase en trouvant l'équation caractéristique du système, puis en utilisant cette équation pour obtenir la forme variables de phase. L'équation caractéristique est :

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A_z}) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0$$

Sous forme de variables de phase, l'espace d'état du système est :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A_x x} + \mathbf{B_x}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u \\ y &= \mathbf{C_x x} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

La matrice de contrôlabilité du système en variables de phase est :

$$\mathbf{C_{Mx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_x} & \mathbf{A_x B_x} & \mathbf{A_x^2 B_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix}$$

On peut donc calculer la matrice de transformation :

$$\mathbf{P} = \mathbf{C_{Mz}} \mathbf{C_{Mx}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut maintenant faire la conception du contrôleur. Selon le cahier de charges du problème, on obtient :

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{-\ln(0.208)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.208)}} = 0.447 \\ \omega_n &= \frac{4}{T_s \zeta} = 2.237 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Les pôles du système voulu sont :

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm j2$$

ce qui donne une équation caractéristique :

$$(s + 1 + j2)(s + 1 - j2) = s^2 + 2s + 5$$

Puisque l'équation caractéristique de $G(s)$ est de 3^e ordre, il faut trouver un autre pôle. Parce que $G(s)$ a un zéro à -4, on peut choisir le 3^e pôle de sorte qu'il annule ce zéro. L'équation caractéristique voulue devient :

$$D(s) = (s+4)(s^2+2s+5) = s^3+6s^2+13s+20 = 0$$

L'équation d'état du système en variables de phase, avec feedback, est :

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x}\mathbf{K_x})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(10+k_{1x}) & -(17+k_{2x}) & -(8+k_{3x}) \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

L'équation caractéristique est :

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x}\mathbf{K_x})) = s^3 + (8+k_{3x})s^2 + (17+k_{2x})s + (10+k_{1x}) = 0$$

Et donc :

$$\mathbf{K_x} = \begin{bmatrix} k_{1x} & k_{2x} & k_{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Avec le design complété, on peut maintenant transformer le système à sa forme originale (cascade).

$$\mathbf{K_z} = \mathbf{K_x}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & -2 \end{bmatrix}$$

ce qui donne le diagramme de fluence de la figure 10.16.

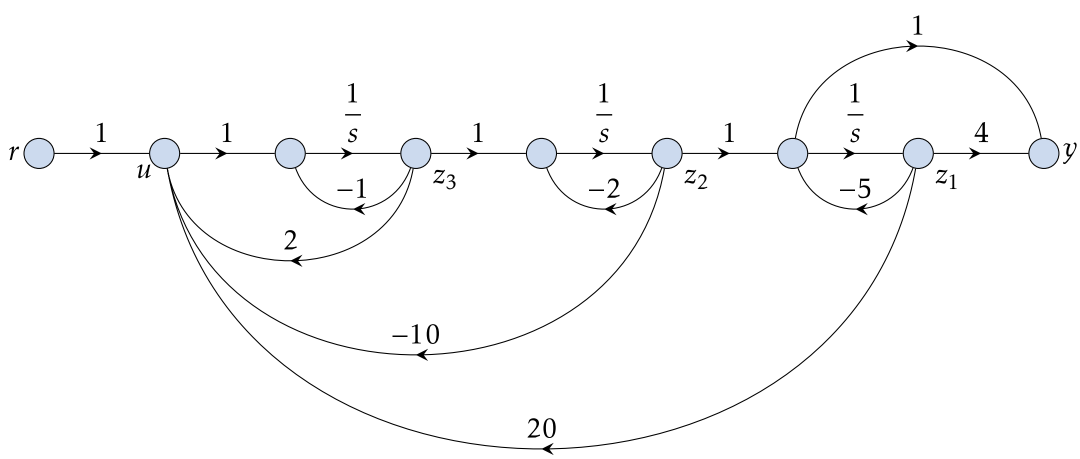


Figure 10.16 – Diagramme de fluence de l'exemple 8 (avec feedback)

On peut vérifier le design. L'espace d'état du système modifié avec feedback est :

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A_z} - \mathbf{B_z}\mathbf{K_z})\mathbf{z} + \mathbf{B_z}r = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \mathbf{C_z}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

Si on convertit à une fonction de transfert, on obtient :

$$T(s) = \frac{s+4}{s^3+6s^2+13s+20} = \frac{1}{s^2+2s+5}$$

ce qui est la fonction de transfert voulue.

10.8.5 Design en fonction de l'erreur statique par contrôle intégral

Cette section présente le design de contrôleurs afin d'éliminer l'erreur statique d'un système. La figure 10.17 montre un système avec contrôle standard, montré en pointillé, auquel on a ajouté un parcours de feedback et un intégrateur.

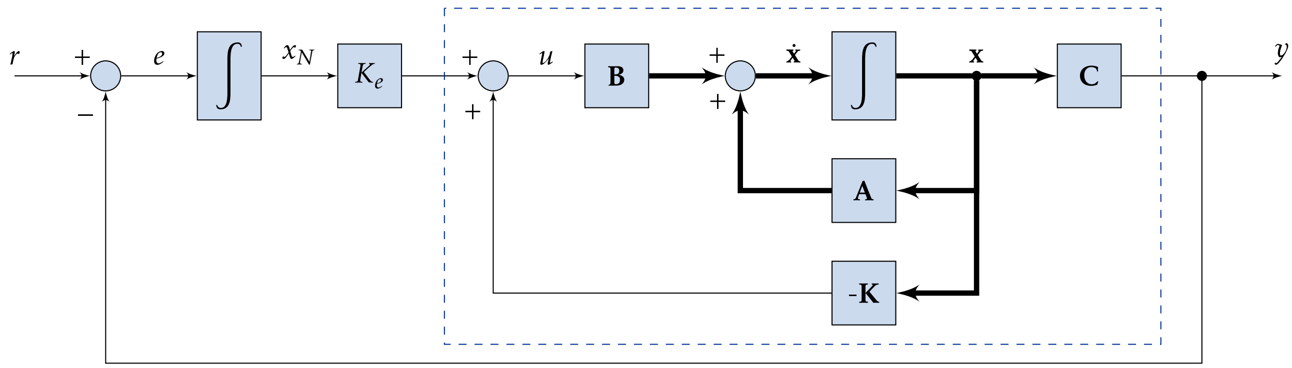


Figure 10.17 – Diagramme bloc d'un système avec contrôle intégral

Une variable d'état additionnelle, x_N, a été ajoutée à la sortie de l'intégrateur de gauche. L'erreur est la dérivée de cette variable d'état. Selon la figure 10.17,

$$\dot{x}_N = r - \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.95}$$

Si on écrit les équations d'état,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \tag{10.96}$$
$$\dot{x}_N = -\mathbf{C}\mathbf{x} + r \tag{10.97}$$
$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{10.98}$$

On peut écrire ces équations d'état comme des matrices et vecteurs augmentés,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{10.99}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_N \end{bmatrix} \tag{10.100}$$

Puisque

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x} + K_e x_N = -\begin{bmatrix}\mathbf{K} & -K_e\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ x_N\end{bmatrix} \tag{10.101}$$

en substituant, on obtient :

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K}) & \mathbf{B}K_e \\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ x_N\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0} \\ 1\end{bmatrix} r \tag{10.102}$$

$$y = \begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x} \\ x_N\end{bmatrix} \tag{10.103}$$

Le type du système a donc été augmenté, et on peut utiliser l'équation caractéristique du système augmenté pour calculer $\mathbf{K}$ et K_e, selon la réponse transitoire voulue. Il y a cependant un pôle supplémentaire dans le système, qu'il faudra déterminer pendant la conception. L'effet de ce pôle sur la réponse transitoire du système doit être pris en considération. On peut essayer d'annuler le pôle avec un zéro, si possible.

Exemple 9

Soit le système suivant :

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -3 & -5\end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

1. Faire la conception d'un contrôleur sans contrôle intégral pour obtenir un dépassement de 10% et un temps de stabilisation de 0.5s. Évaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.
2. Répéter le design, cette fois avec du contrôle intégral. Évaluer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire.

---

a. Selon le cahier de charge, le polynôme de 2^e ordre recherché est :

$$s^2 + 16s + 183.1$$

Puisque le système est déjà sous forme de variables de phase, l'équation caractéristique du système avec du feedback est :

$$s^2 + (5+k_2)s + (3+k_1)$$

On obtient alors :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix}k_1 & k_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}180.1 & 11\end{bmatrix}$$

La représentation du système sous forme d'espace d'état est :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}+\mathbf{B}r = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -183.1 & -16 \end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}r \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}\end{aligned}$$

L'erreur statique pour une entrée échelon unitaire est :

$$\begin{aligned}e(\infty) &= 1+\mathbf{C}(\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \\ &= 1+\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -183.1 & -16 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= 0.995\end{aligned}$$

b. En utilisant les équations 10.102 et 10.103, on obtient :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}\right) & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}K_e \\ -\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -(3+k_1) & -(5+k_2) & K_e \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Si on convertit le système initial à une fonction de transfert (équation 10.28), on obtient :

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+3}$$

Il faut ajouter un pôle au système contrôlé, puisqu'on utilise du contrôle intégral. Selon la fonction de transfert du système original, il n'y a pas de zéro à annuler par ce troisième pôle. On choisit donc un pôle qui est très loin des pôles du système, comme $(s+100)$. Le polynôme souhaité est donc :

$$(s+100)(s^2+16s+183.1) = s^3+116s^2+1783.1s+18310$$

et l'équation caractéristique du système avec contrôle intégral est :

$$s^3+(5+k_2)s^2+(3+k_1)s+K_e$$

ce qui donne

$$k_1 = 1780.1 \quad k_2 = 111 \quad K_e = 18310$$

Si on substitue ces valeurs de k_i, on obtient

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} = \quad = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.1 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_N \end{bmatrix}$$

On convertit à une fonction de transfert pour vérifier le design :

$$T(s) = \frac{18310}{s^3 + 116s^2 + 1783.1s + 18310}$$

et l'erreur statique :

$$\begin{aligned} e(\infty) &= 1 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ &= 1 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1783.1 & -116 & 18310 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

ce qui veut dire que le système se comporte comme un système de type 1.