Chapitre 11

Logique floue

Ce chapitre présente une méthode moderne de contrôle, la logique floue. La logique floue diffère de la logique classique parce qu'elle permet des définitions partielles ou "floues" de règles de contrôle. La puisance de la logique floue vient de sa capacité à décrire un phénomène ou processus particulier de façon linguistique, puis de représenter ce phénomène par un faible nombre de règles. Les connaissances dans un système flou sont contenues dans les règles et dans les ensembles flous, qui contiennent des descriptions générales des propriétés du phénomène en question.

Le chapitre commence par une brève comparaison de la logique floue et de la logique classique. Un définition plus formelle de la logique floue s'en suit. Des modificateurs linguistiques aux règles de contrôle, des "haies", sont ensuite présentées. Pour appliquer les règles de contrôle floues et développer un signal de contrôle réel, deux méthodes sont présentées : la "défuzzification" par les méthodes de Mamdani et de Sugeno. On terminera ensuite par une étude de cas.

11.1 Comparaison : la logique floue et logique classique

La logique booléenne classique ne permet que deux états : VRAI ou FAUX. La logique floue fut proposée par Zadeh en 1965 ; elle permet d'exprimer différents niveaux, plutôt que seulement 1 ou 0. Par exemple : le moteur est chaud, le moteur est très chaud. Quelle est la différence entre « chaud » et « très chaud » ? Ou encore, un homme est haut s'il mesure 170cm. Un homme est très haut s'il mesure 190cm. Où est la ligne de démarcation ? Un homme de 180cm est-il haut ou très haut ? 180.5cm ? 179.5cm ?

La logique floue est une branche des mathématiques qui permet à un ordinateur de modéliser le monde réel de la même façon que les personnes. Elle est préoccupée par la quantification et le raisonnement en utilisant un langage qui permet des définitions ambiguë, comme *beaucoup*, *peu*, *petit*, *haut*, *dangereux*. Elle s'occupe de situations où la question qui est posée et la réponse obtenue contiennent des concepts vagues.

Selon la logique floue, le raisonnement exacte est un cas limite du raisonnement approximatif ; tout n'est qu'un degré. Tout système logique peut être rendu flou. Les connaissances sont interprétées comme une collection de contraintes élastiques ou floues d'un ensemble de variables. L'inférence est un processus de propagation de contraintes élastiques. La logique booléenne est un sous-ensemble de la logique floue.

La logique floue permet d'accommoder le concept de vérité partielle : des valeurs entre complètement vrai et complètement faux sont admises. On supporte des modes de raisonnement approximatifs plutôt qu'exacts. Son importance provient du fait que le raisonnement humain est approximatif.

La définition de Zadeh :

> Fuzzy Logic is determined as a set of mathematical principles for knowledge representation based on degrees of membership rather than on crisp membership of classical binary logic.

11.2 Ensembles flous

En logique floue, un ensemble flou contient plusieurs valeurs. L'ensemble floue est concerné par un degré d'appartenance (ou degré de vérité). On utilise un continuum de valeurs logiques entre 0 (complètement faux) et 1 (complètement vrai). Une fonction d'appartenance est utiliser pour mapper un item X dans le domaine des nombres réels à un intervalle de 0 à 1, ce qui permet un degré de vérité.

L'appartenance à un ensemble représente une valeur entre 0 et 1. Un ensemble flou peut être défini comme un ensemble ayant des frontières floues. Un ensemble flou est définit comme suit : soit S un ensemble et x un membre de cet ensemble. Un sous-ensemble flou F de S est définit par une fonction d'appartenance $\mu_F(x)$ qui mesure le degré auquel x appartient à F.

Un exemple : Soit S un ensemble des entiers positifs et F un sous-ensemble flou de petits entiers. Des entiers peuvent avoir une distribution de probabilité qui indiquent leur appartenance au sous-ensemble flou F : $\mu_F(1) = 1.0$, $\mu_F(2) = 1.0$, $\mu_F(3) = 0.9$, ... $\mu_F(30) = 0.01$. La figure 11.1 montre cette fonction d'appartenance.

Dans la théorie des ensembles flous, l'ensemble flou A de X (où X est l'univers d'étude)

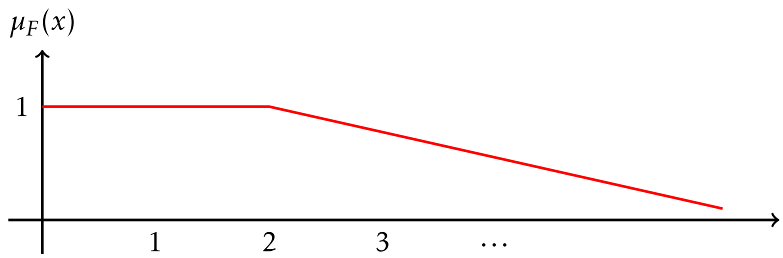


Figure 11.1 – Représentation du sous-ensemble flou F des petits entiers

est définit comme une fonction :

$$\mu_A(x) : X \to 0,1 \tag{11.1}$$

où $\mu_A(x) = 1$ si x est totalement dans A, $\mu_A(x) = 0$ si x n'est pas dans A et $0 < \mu_A(x) < 1$ si x est partiellement dans A. La fonction d'appartenance est une mesure :

- Du degré auquel un élément est membre d'un ensemble
- Du degré d'appartenance
- De la valeur de l'appartenance
- Du degré de confiance

La logique floue permet de transformer plusieurs valeurs réelles en quelques variables floues avec différentes appartenances, ce qui permet de réduire le nombre de règles. On utilise ces règles pour faire la commande d'un système. Le tableau 11.1 compare des règles de commande classiques à la logique floue pour un système de chauffage, où v est la vitesse du ventilateur.

Tableau 11.1 – Comparaison entre la logique classique et la logique floue pour un système de chauffage

Logique classique	Logique floue
Si $temp = 21°$ ALORS $v = 30\%$	Si $temp$ = élevé ALORS v = lent
Si $temp = 22°$ ALORS $v = 40\%$	Si $temp$ = assez élevé ALORS v = rapide
Si $temp = 23°$ ALORS $v = 50\%$	Si $temp$ = très élevé ALORS v = très rapide
Si $temp = 24°$ ALORS $v = 60\%$	
Si $temp = 25°$ ALORS $v = 75\%$	
Si $temp > 26°$ ALORS $v = 100\%$	

Pour représenter la logique floue sur ordinateur, il faut déterminer la fonction d'appartenance. On utilise le plus souvent une représentation graphique. Les bornes de ces graphiques proviennent d'experts dans le domaine. La figure 11.2 montre deux exemples de représentation de la température, une en logique classique, et l'autre en logique floue.

Selon la figure 11.2, en logique classique, une température de 22.5° est considérée comme élevée. En logique floue, une température de 22.5° appartient au groupe "moyenne" avec un degrée d'appartenance de 0.167, et appartient au groupe "élevée" avec un degré d'appartenance de 0.75.

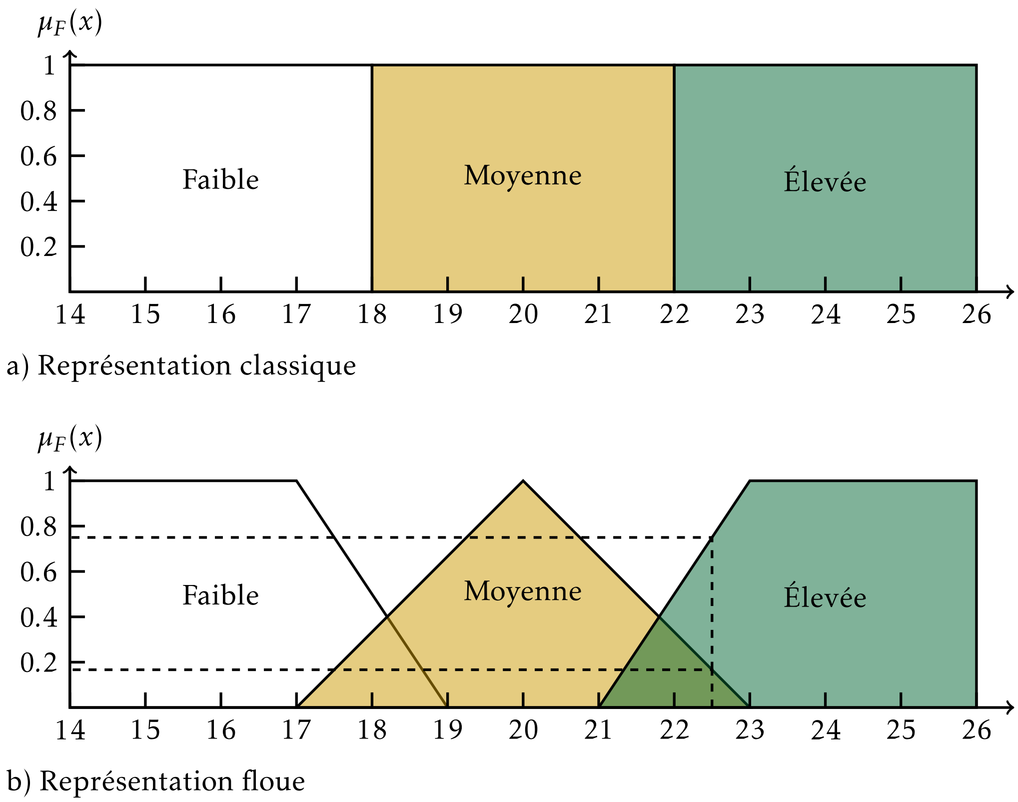


FIGURE 11.2 – Comparaison de l'appartenance de la température en logique classique vs la logique floue

Les variables floues *faible*, *moyenne* et *élevée* sont représentées par des fonctions linéaires. D'autres fonction auraient pu être utilisées, comme des trapézoïdes, des paraboles, etc. Cependant, les fonction linéaires sont beaucoup plus faciles à implémenter de façon pratique, et donnent de bons résultats.

On utilise souvent une notation vectorielle pour représenter les fonctions. Pour les fonctions d'appartenance de la figure 11.2, on peut utiliser la notation suivante :

- Température faible : (1/17, 0/19)
- Température moyenne : (0/17, 1/20, 0/23)
- Température élevée : (0/21, 1/23)

11.3 Haies

Les haies sont des modificateurs de valeurs floues et permettent la génération de déclaration floues à l'aide de calculs mathématiques. Elles modifient la forme des ensembles flous. Elles ont le même rôle que des adverbes et adjectifs en français. Selon leur impact sur la fonction d'appartenance, on les classifie selon leur effet :

- Concentration : aide à intensifier un ensemble. Exemple : “très” crée une concentration et crée un nouveau sous-ensemble.
- Dilatation : agrandi l’ensemble. Exemple : “plus” ou “moins” rend l’ensemble plus grand que l’original.
- Contraste : change la nature de l’ensemble en l’intensifiant ou en l’agrandissant. Exemple : “généralement”.

Les haies sont utilisées comme modificateurs tout-usage. Ils aident à refléter la pensée humaine. Un exemple de haies est montré à la figure 11.3, où on montre les ensembles *très faible* et *très élevée*.

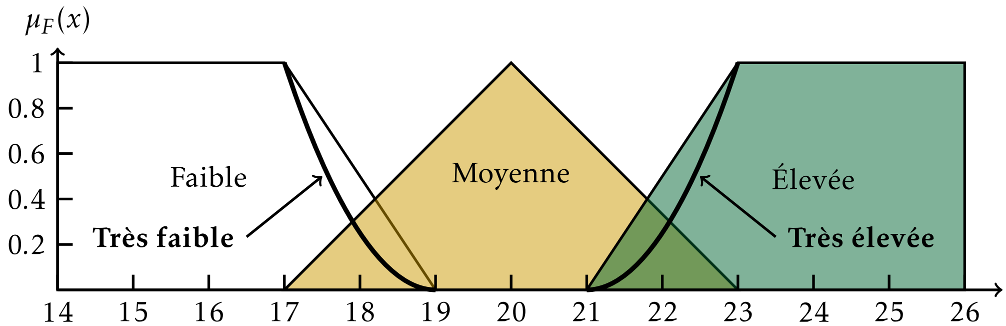
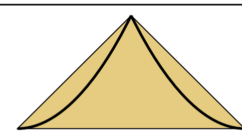
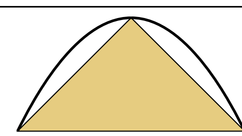


Figure 11.3 – Exemple de haies

Le tableau 11.2 montre quelques exemples de haies.

Tableau 11.2 – Exemples de haies et représentation mathématique

Haie	Représentation mathématique	Représentation graphique
Très	$[\mu_A(x)]^2$	
Plus ou moins	$\sqrt{\mu_A(x)}$	

11.4 Opérateurs flous

Les opérateurs flous décrivent comment des ensembles flous interagissent ensembles. On regardera certaines opérations communes, comme le complément, l’intersection et l’union.

Le complément permet de vérifier de combien un élément n'appartient pas à un ensemble. Comme exemple, si on a l'ensemble des températures élevées, le complément est l'ensemble des températures qui ne sont pas élevées. Si A est l'ensemble flou, son complément $\neg A$ est :

$$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x) \tag{11.2}$$

L'intersection de deux ensembles, en logique flou, est un peu différente des méthodes classiques. On cherche à savoir de combien un élément est-il dans les deux ensembles. On utilise alors la valeur minimale d'appartenance pour calculer l'intersection.

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min[\mu_A(x),\ \mu_B(x)] \tag{11.3}$$

En logique floue, l'union est le contraire de l'intersection. On cherche à savoir de combien un est-il dans l'un des deux ensembles. On utilise la valeur maximale d'appartenance.

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max[\mu_A(x),\ \mu_B(x)] \tag{11.4}$$

La figure 11.4 résume ces opérations, de façon graphique.

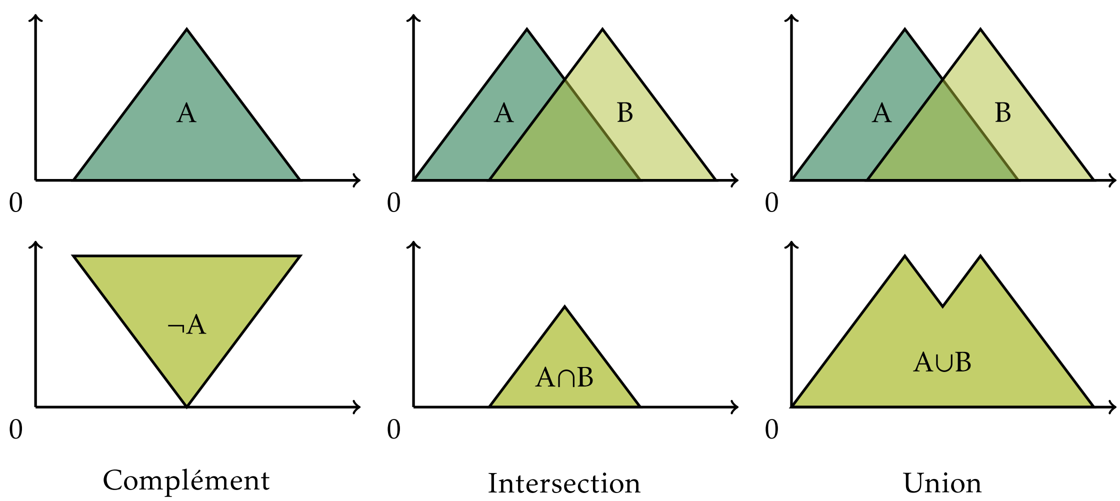


Figure 11.4 – Exemple d'opérations sur des ensembles flous

11.5 Règles floues

Une règle floue est une déclaration de la forme suivante :

$$\text{SI } x \text{ est } A \text{ ALORS } y \text{ est } B \tag{11.5}$$

où x et y sont des variables linguistiques, et A et B sont des valeurs linguistiques, déterminées par les ensembles flous sur les ensembles X et Y. Une variable linguistique est une variable floue. Par exemple : La tension est haute. La variable linguistique *tension* prend la valeur linguistique *élevée*. La plage de valeurs linguistiques possibles d'une règle représente l'univers de cette variable. Un exemple de règle floue est :

SI *vitesse* est *lente* ALORS *arret* est *court*

La variable *vitesse* peut avoir une plage de valeurs entre 0 et 220 km/h. On peut inclure des sous-ensembles flous (très lent, lent, moyenne, rapide, très rapide) pour modifier cette règle. Chaque sous-ensemble flou représente une valeur linguistique pour la variable.

La logique classique (SI – ALORS) utilise la logique binaire. La logique floue permet d'associer une plage de valeurs (un ensemble flou) à des variables linguistiques. On peut réduire le nombre de règles jusqu'à 90% en utilisant la logique floue.

11.6 Fuzzification

La fuzzification est l'opération de rendre une entrée classique en valeur linguistique. Des valeurs d'entrée sont traduites en concepts linguistiques représentés comme des ensembles flous. Les fonctions d'appartenance sont appliquées aux mesures et des degrés de vérité sont établis pour chaque proposition.

Les règles d'inférence permettent de calculer les valeurs d'appartenance de règles qui ont plusieurs antécédents. Si la conjonction qui unit deux antécédents est ET (AND), on prend le minimum des deux. Ex :

SI voiture a de l'essence ET voiture a un moteur ALORS voiture peut fonctionner

Supposons que la voiture a le plein d'essence (appartenance 1.0), mais qu'elle n'a pas de moteur (appartenance 0). La règle doit-elle être déclenchée ? Bien sûr que non ; une voiture sans moteur ne fonctionne pas.

Si la conjonction qui unit deux antécédents est OU (OR), on prend le maximum des deux. Ex :

SI le chien jappe OU il fait très froid dehors ALORS ouvrir la porte

Supposons que le chien ne jappe pas (appartenance 0.0), mais qu'il fait très froid dehors (appartenance 1.0). Doit-on ouvrir la porte au chien ? Bien sûr que oui ; on ne va pas laisser le chien dehors en temps très froid.

Les conclusions atteintes par les systèmes flous sont des faits flous ayant des degrés d'appartenance. Ex : risque est faible avec une appartenance de 0.5. Cependant, le déroulement final doit être une décision concrète ; ex : louer de l'argent. Le processus de transformer un fait flou en un fait net est la *défuzzification*.

11.7 Défuzzification

La défuzzification est le processus de convertir une valeur floue en valeur nette. Quelques méthodes existent, comme l'appartenance maximale, la méthode du centroïde, et la méthode des moyennes pondérées.

11.7.1 Inférence Mamdani

L'inférence Mamdani procède selon quatre étapes :

1. Fuzzification des variables d'entrée
2. Évaluation des règles
3. Agrégation des sorties des règles
4. Défuzzification

On prend l'exemple d'un système de contrôle d'un ventilateur de maison, ayant 2 entrées (température et humidité) et une sortie (vitesse du ventilateur). Des règles possibles sont :

$$\begin{array}{llll} \text{SI} & x \text{ est } A_1 \text{ OU } y \text{ est } B_1 & \text{ALORS} & z \text{ est } C_1 \\ \text{SI} & x \text{ est } A_2 \text{ ET } y \text{ est } B_2 & \text{ALORS} & z \text{ est } C_2 \\ \text{SI} & x \text{ est } A_3 & \text{ALORS} & z \text{ est } C_3 \end{array}$$

où x est la température, y est l'humidité et z est la vitesse du ventilateur. Les ensembles flous sont :

- A_1 = faible, A_2 = moyenne, A_3 = élevée
- B_1 = sec, B_2 = humide
- C_1 = lent, C_2 = moyenne, C_3 = rapide

Les ensembles flous sont donnés dans la figure 11.5.

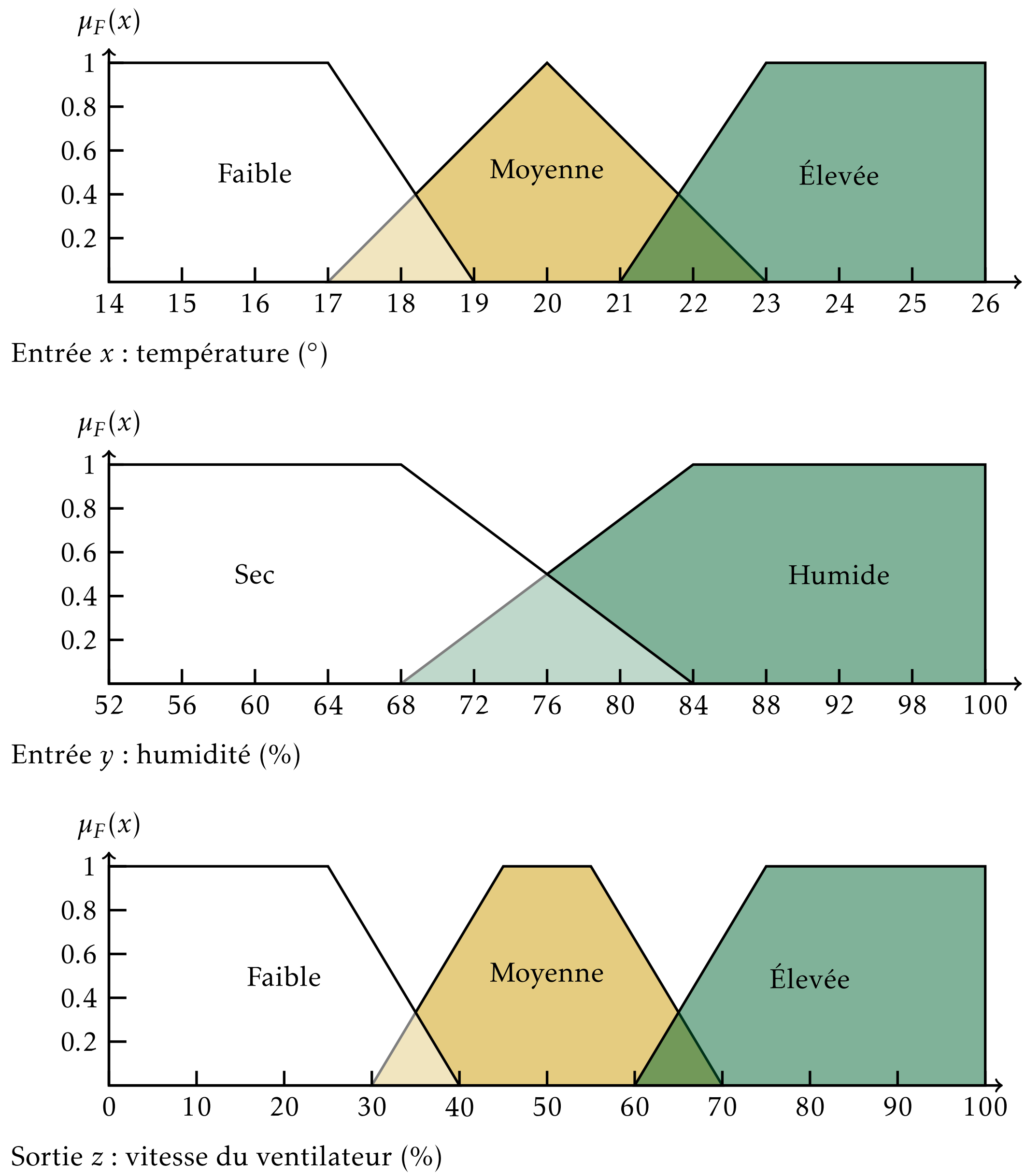


Figure 11.5 – Ensembles flous pour exemple d'inférence Mamdani

Supposons qu'il fait actuellement 18°C, et que l'humidité est de 80%. On applique ces entrées sur les fonctions d'appartenance pour déterminer l'appartenance à chaque variable. Une température de 18°C correspond à une appartenance de 0.5 à l'ensemble *faible* ($\mu_{A1} = 0.5$) et une appartenance de 0.33 à l'ensemble *moyenne* ($\mu_{A2} = 0.33$). Une humidité de 80% correspond à une appartenance de 0.25 à l'ensemble *sec* ($\mu_{B1} = 0.25$) et une appartenance de 0.75 à l'ensemble *humide* ($\mu_{B2} = 0.75$).

Évaluation des règles

Il faut maintenant évaluer les règles en fonction des entrées obtenues. On applique les opérateurs flous correspondants pour combiner les règles. Si une règle a plusieurs antécédents, un opérateur flou est utilisé pour obtenir un seul chiffre qui représente le résultat. Ce résultat est ensuite appliqué à la fonction d'appartenance de la conséquence. Le résultat peut être produit par deux méthodes : *coupure* ou *mise à l'échelle*.

Si on reprend l'exemple précédent, on applique les valeur d'appartenance à la règle 1 :

$$\text{SI} \quad x \text{ est } A_1 \text{ (0.5) OU } y \text{ est } B_1 \text{ (0.25)} \quad \text{ALORS} \quad z \text{ est } C_1 \text{ (?)}$$

On peut utiliser deux méthodes pour combiner ces antécédents :

1. Méthode 1 : maximum
$$\mu_{C1} = \max[\mu_{A1}, \mu_{B1}] = 0.5$$
2. Méthode 2 : probor
$$\begin{aligned}\mu_{C1} = \text{probor}[\mu_{A1}, \mu_{B1}] &= (\mu_{A1} + \mu_{B1}) - (\mu_{A1} \cdot \mu_{B1}) \\ &= (0.5 + 0.25) - (0.5 * 0.25) = 0.625\end{aligned}$$

Si on utilise la méthode 1, l'appartenance est 0.5.

Pour la règle 2 :

$$\text{SI} \quad x \text{ est } A_2 \text{ (0.33) ET } y \text{ est } B_2 \text{ (0.75)} \quad \text{ALORS} \quad z \text{ est } C_2 \text{ (?)}$$

On peut utiliser deux méthodes pour combiner ces antécédents :

1. Méthode 1 : minimum
$$\mu_{C1} = \min[\mu_{A2}, \mu_{B2}] = 0.33$$
2. Méthode 2 : prod
$$\mu_{C1} = \text{prod}[\mu_{A2}, \mu_{B2}] = \mu_{A1} \cdot \mu_{B1} = (0.33)(0.75) = 0.25$$

Si on utilise la méthode 1, l'appartenance est 0.33.

Au total, on obtient :

$$\begin{array}{lll} \text{SI} \quad x \text{ est } A_1 \text{ (0.5) OU } y \text{ est } B_1 \text{ (0.25)} & \text{ALORS} & z \text{ est } C_1 \text{ (0.5)} \\ \text{SI} \quad x \text{ est } A_2 \text{ (0.33) ET } y \text{ est } B_2 \text{ (0.75)} & \text{ALORS} & z \text{ est } C_2 \text{ (0.33)} \\ \text{SI} \quad x \text{ est } A_3 \text{ (0.0)} & \text{ALORS} & z \text{ est } C_3 \text{ (0.0)} \end{array}$$

Inférence

Si on utilise la méthode de coupure pour combiner les règles, il faut créer un nouveau polygone à partir des trois fonctions d'appartenance de la conséquence C. La hauteur du polygone est déterminée à partir de la valeur d'appartenance calculée plus haut. L'agrégation pour cet exemple est montré à la figure 11.6.

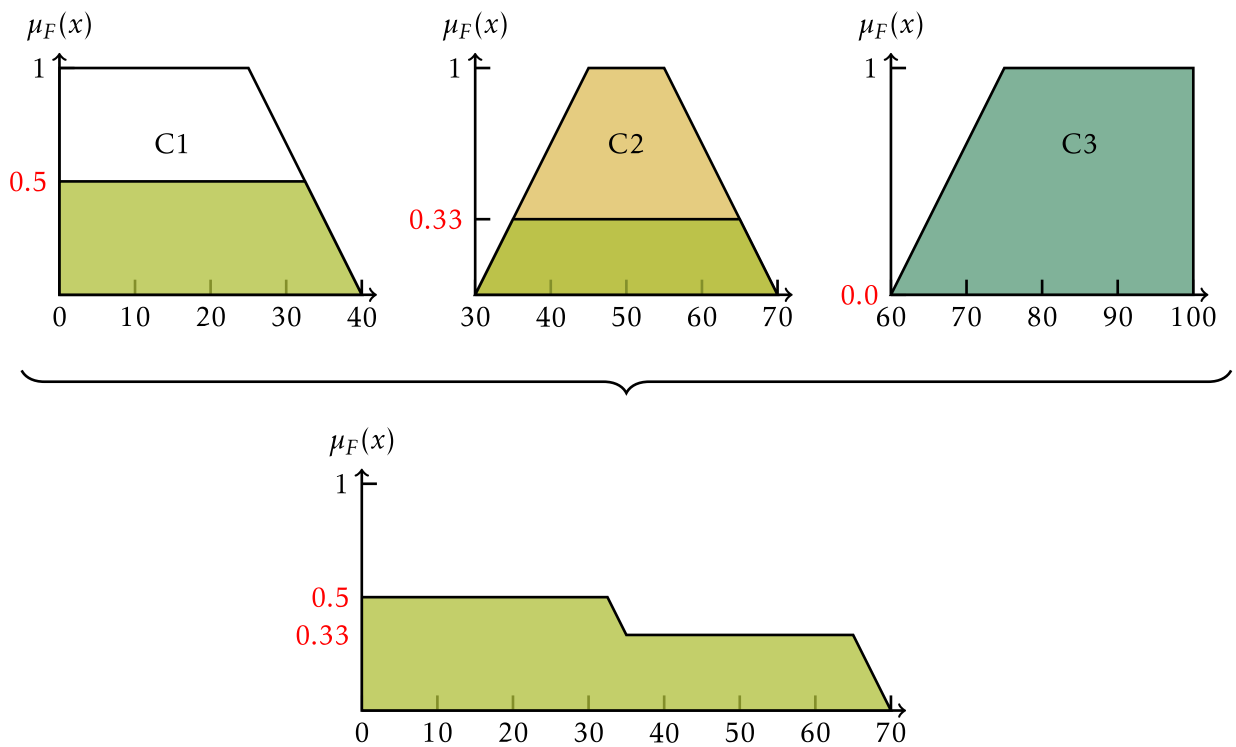


FIGURE 11.6 – Agrégation des règles de sortie par coupure

Défuzzification

Après avoir combiné les règles, il faut maintenant produire un chiffre net comme sortie. Dans ce cas-ci, la sortie doit être la vitesse du ventilateur. La technique la plus populaire est la méthode du centroïde : on cherche le centre de gravité du polygone obtenu :

$$CG = \frac{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x) \cdot x}{\sum_{x=a}^{b} \mu_A(x)} \tag{11.6}$$

Le centre de gravité n'a pas besoin d'être calculé des façon très précise. On peut approximer, en calculant à tous les 10, par exemple. Pour l'exemple précédent :

$$CG = \frac{(0+10+20+30)(0.5)+(40+50+60)(0.33)}{0.5+0.5+0.5+0.5+0.33+0.33+0.33} = 26.67 \tag{11.7}$$

Le ventilateur doit donc être à 26.67% de sa vitesse maximale.

11.7.2 Mise à l'échelle

La mise à l'échelle est une autre méthode pour générer la figure de sortie. Dans ce cas, au lieu de simplement couper la figure, on conserve la forme générale. Cette approche permet de mieux préserver l'intention de la règle, mais elle est un peu plus complexe à implanter mathématiquement. La figure 11.7 montre la différence entre la coupure et la mise à l'échelle pour la fonction d'appartenance C2 de l'exemple précédent.

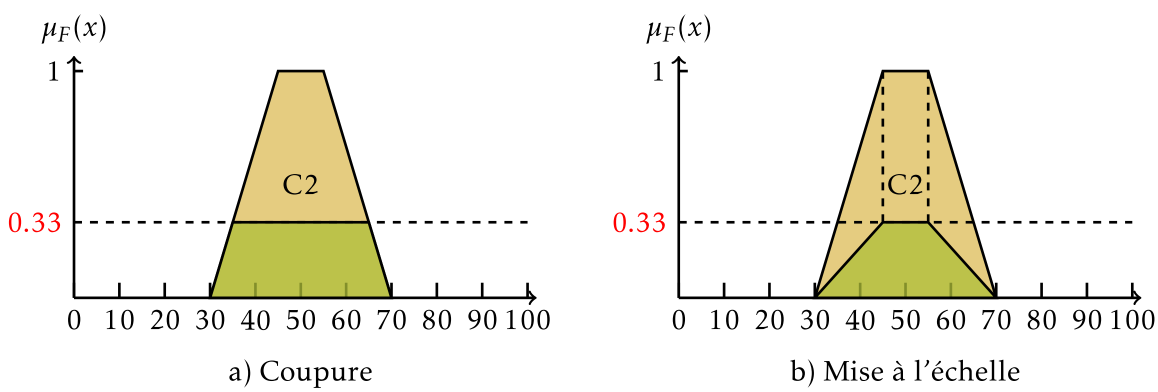


Figure 11.7 – Comparaison entre la coupure et la mise à l'échelle

11.7.3 Inférence Sugeno

La méthode de Sugeno permet de simplifier le calcul de l'aggrégation, afin d'obtenir plus rapidement une solution nette. Cette méthode est souvent utilisée pour des applications à temps réel, où le temps de calcul est important.

La méthode de Sugeno utilise un seul pic comme fonction d'appartenance, plutôt qu'un polygone. Ce pic est un ensemble flou ayant une fonction d'appartenance 1 à un point particulier de l'espace, et 0 ailleurs. Le résultat de l'évaluation des règles devient l'amplitude du pic. La figure 11.8 montre un exemple de fonction de style Sugeno pour le même exemple.

Les conséquences sont évaluées selon le résultat de l'évaluation des règles. Dans l'exemple précédent, on a obtenu une appartenance de 0.5 pour la règle 1, de 0.33 pour la règle 2,

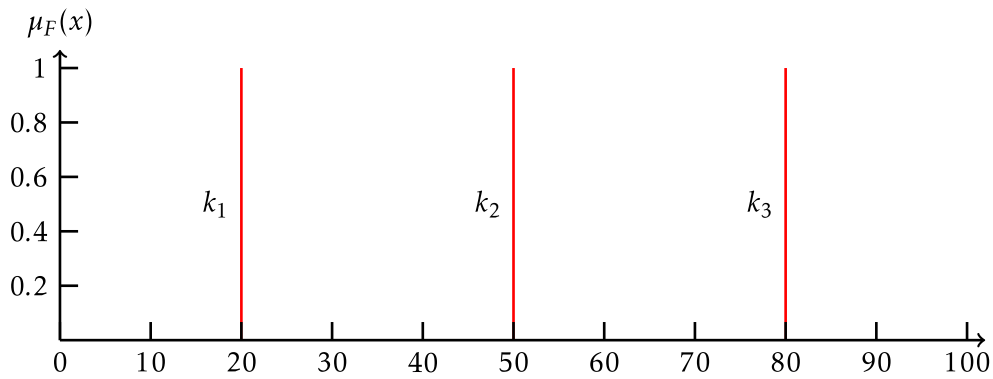


FIGURE 11.8 – Conséquences de style Sugeno

et 0 pour la règle 3. Ces trois valeurs deviennent alors l'amplitude des pics, comme à la figure 11.9.

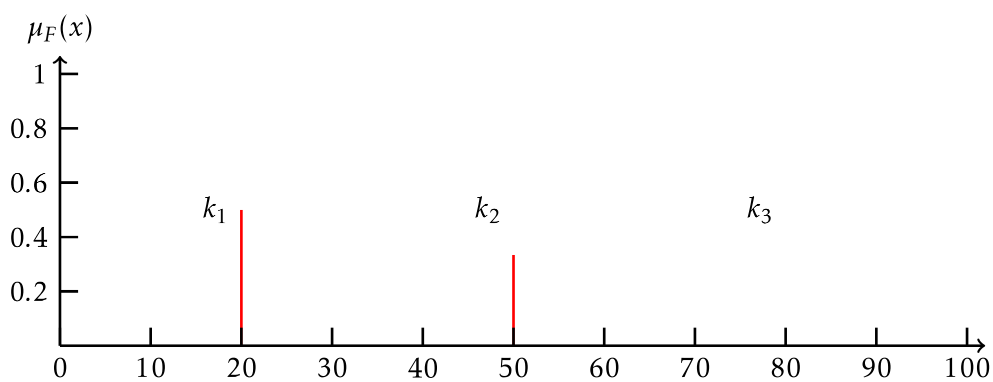


FIGURE 11.9 – Évaluation des conséquences de style Sugeno

Pour faire l'aggrégation des règles, on utilise une moyenne pondérée :

$$CG_{Sugeno} = \frac{\sum_i \mu_A(k_i) \cdot k_i}{\sum_i \mu_A(k_i)} \tag{11.8}$$

Selon l'exemple précédent, on obtient :

$$CG_{Sugeno} = \frac{(0.5)(20) + (0.33)(50)}{0.5 + 0.33} = 32\% \tag{11.9}$$

On obtient une vitesse de ventilateur de 32%, ce qui est quand même près de la valeur obtenue par l'autre méthode.