Chapitre 2

Modélisation

Le but de ce chapitre est d'apprendre à écrire des fonctions de transfert pour différents types de systèmes : électriques, mécaniques et électromécaniques. Pour appliquer du contrôle à un système, on doit être en mesure de décrire son comportement de façon mathématique.

Pour modéliser ces systèmes, on se sert de la transformée de Laplace. Ceci permet de décrire le comportement des systèmes et les analyser de façon assez simple.

On verra aussi comment linéariser des équations.

2.1 Transformée de Laplace

On commence par une petite révision de la transformée de Laplace. La transformée d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \tag{2.1}$$

où $s = \sigma + j\omega$.

La transformée inverse existe aussi,

$$\mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)e^{st}ds = f(t)u(t) \tag{2.2}$$

où

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Le tableau 2.1 montre quelques fonctions les plus utilisées. Une liste plus complète de transformées est disponible à la fin du chapitre.

TABLEAU 2.1 – Transformées de Laplace communes

Transformée	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\dfrac{1}{s}$
3	$tu(t)$	$\dfrac{1}{s^2}$
4	$t^n u(t)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
5	$e^{-at}u(t)$	$\dfrac{1}{s+a}$
6	$\sin(\omega t)u(t)$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
7	$\cos(\omega t)u(t)$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$

EXEMPLE 1

Calculer la transformée de Laplace de $e^{-at}u(t)$.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{e^{-at}u(t)\} &= \int_{0-}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,dt = \int_{0-}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,dt \\
&= \frac{-1}{s+a}e^{-(s+a)t}\bigg|_0^{\infty} = \frac{-1}{s+a}(0-1) \\
&= \frac{1}{s+a}
\end{aligned}$$

Propriétés

La transformée de Laplace a plusieurs propriétés intéressantes qui rendent le calcul de fonctions complexes plus simple. On note entre autre la linéarité (pr.2), dérivée (pr.7-9) et les théorèmes de valeur finales et initiales (pr.11,12). Le tableau 2.2 montre ces propriétés.

Tableau 2.2 – Propriétés de la transformée de Laplace

Propriété	**Théorème**	**Nom**
1	$\mathfrak{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Définition
2	$\mathfrak{L}[kf(t)] = kF(s)$	Linéarité
3	$\mathfrak{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Linéarité
4	$\mathfrak{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$	Translation
5	$\mathfrak{L}[f(t-\tau)] = e^{-s\tau}F(s)$	Retard temporel
6	$\mathfrak{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Proportionnalité
7	$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$	Dérivée
8	$\mathfrak{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	Dérivée
9	$\mathfrak{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0^-)$	Dérivée
10	$\mathfrak{L}[\int_{0^-}^{t} f(\tau)d\tau] = \frac{F(s)}{s}$	Intégration
11	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Valeur finale
12	$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Valeur initiale

Exemple 2

Calculer la transformée inverse de :

$$F(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$$

Selon la propriété 4,

$$\mathfrak{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$$

et la transformée 3,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) = tu(t)$$

Donc, la transformée inverse est

$$f(t) = e^{-3t}tu(t)$$

2.1.1 Expansion en fractions partielles

Pour des fonctions de transfert complexes, il peut être difficile de trouver la transformée inverse. On se sert donc de l'expansion en fractions partielles. On utilisera des exemples pour démontrer les principes.

Soit une fonction

$$F(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

Il n'existe pas de transformée inverse directe à cette fonction. Dans ce cas, il faut faire la division, si l'ordre du numérateur est plus grand que l'ordre du dénominateur.

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad\quad\quad\quad s+1 \\ \hline
s^2+s+5 & s^3 + 2s^2 + 6s + 7 \\
 & \underline{-s^3 \;\; - s^2 - 5s} \\
 & \quad\;\; s^2 \;\; + s + 7 \\
 & \quad\; \underline{-s^2 \;\; - s - 5} \\
 & \quad\quad\quad\quad\quad 2
\end{array}$$

On obtient donc :

$$\frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

La transformée inverse est :

$$f(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + \mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right]$$

Il reste cependant le troisième terme à déterminer. On utilisera l'expansion en fractions partielles pour trouver

$$\mathfrak{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right]$$

Il faut factoriser le dénominateur en une somme de termes et ensuite trouver la transformée inverse de chaque terme. Il y a trois différentes façon de faire, selon la valeur des racines : réelles et distinctes, réelles et répétées, ou complexes.

1. Racines réelles et distinctes.

Exemple :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

On peut écrire :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

Pour isoler K_1, on multiplie chaque côté par $(s+1)$. On obtient :

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{(s+1)K_2}{(s+2)}$$

Si on prend $s=-1$,

$$K_1 = \left.\frac{2}{(s+2)}\right|_{s=-1} = 2$$

Pour trouver K_2, on fait le même processus, sauf qu'on multiplie par $(s+2)$ cette fois.

$$K_2 = \left.\frac{2}{(s+1)}\right|_{s=-2} = -2$$

Donc,

$$F(s) = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

qui donne la transformée inverse suivante :

$$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$$

Note : La fonction $u(t)$ doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le $u(t)$.

De façon générale, pour une fonction de transfert

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_i)\ldots(s+p_n)} \tag{2.4}$$

On peut séparer en une somme de termes tel que

$$F(s) = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_i}{s+p_i} + \cdots + \frac{K_n}{s+p_n} \tag{2.5}$$

La constante K_i peut être déterminée selon la relation suivante :

$$K_i = \left.\frac{(s+p_i)N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_i)\ldots(s+p_n)}\right|_{s=-p_i} \tag{2.6}$$

2. Racines au dénominateur réelles et répétées.

Soit

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

On peut trouver les termes selon

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{s+2}$$

La constante K_1 peut être trouvée en utilisant la première méthode montrée plus haut (ce qui donne $K_1 = 2$. Pour trouver K_2, on multiplie par $(s+2)^2$:

$$\frac{2}{s+1} = \frac{K_1}{s+1}(s+2)^2 + K_2 + K_3(s+2) \tag{*}$$

On évalue à $s = -2$,

$$K_2 = \left.\frac{2}{s+1}\right|_{s=-2} = -2$$

Pour K_3, on dérive l'équation * par rapport à s,

$$\frac{-2}{(s+1)^2} = \frac{(s+2)s}{(s+1)^2}K_1 + K_3$$

De même, si $s = -2$,

$$K_3 = \left.\frac{-2}{(s+1)^2}\right|_{s=-2} = -2$$

De façon générale, pour une fonction du type :

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_2)\dots(s+p_n)} \tag{2.7}$$

On divise la fonction de la manière suivante,

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+p_1)^r} + \frac{K_2}{(s+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{K_r}{(s+p_1)} + \frac{K_{r+1}}{(s+p_2)^r} + \dots + \frac{K_n}{(s+p_n)} \tag{2.8}$$

On peut trouver les coefficients des racines répétées

$$K_i = \left.\frac{1}{(i-1)!}\frac{d^{i-1}F(s)}{ds^{i-1}}\right|_{s=-p_1} \tag{2.9}$$

où $i = 1, 2, \dots r$. Pour les autre coefficients, la technique 1 fonctionne.

3. Racines complexes au dénominateur.

Ici encore, on démontre à l'aide d'un exemple. Soit

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

On peut écrire

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2+2s+5}$$

Le coefficient K_1 est obtenu de la façon habituelle ; $K_1 = 0.6$. Pour K_2 et K_3, on multiplie les deux côtés par le dénominateur, $s(s^2+2s+5)$. On obtient :

$$\begin{aligned} 3 &= K_1(s^2+2s+5) + (K_2 s + K_3)s \\ &= (K_1+K_2)s^2 + (2K_1+K_3)s + 5K_1 \end{aligned}$$

On a donc trois équations,

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 0 \\ 2K_1 + K_3 &= 0 \\ 5K_1 &= 3 \end{aligned}$$

d'où on trouve que $K_2 = -0.6$ et $K_3 = -1.2$.

La fonction de transfert devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} - 0.6\frac{s+2}{s^2+2s+5}$$

La transformée inverse est

$$\begin{aligned} f(t) &= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\ &= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57°) \end{aligned}$$

La démonstration de cette dernière équation est donnée en annexe.

On peut aussi faire ce type de problème avec des nombres complexes :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{3}{s(s+1+j2)(s+1-j2)} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1+j2} + \frac{K_3}{s+1-j2} \end{aligned}$$

On utilise la première technique pour résoudre, $K_1 = 0.6$. Les autre coefficients sont

$$K_2 = \left.\frac{3}{s(s+1-j2)}\right|_{s=-1-j2} = -0.15(2+j)$$

Et K_3 est le conjugué de K_2, $K_3 = -0.15(2-j)$. La fonction devient

$$F(s) = 0.6\frac{1}{s} + \frac{-0.15(2+j)}{s+1+j2} + \frac{-0.15(2-j)}{s+1-j2}$$

Dans le domaine du temps, la fonction est

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0.6 - 0.15\left[(2+j)e^{-(1+j2)t} + (2-j)e^{-(1-j2)t}\right] \\
&= 0.6 - 0.15e^{-t}\left[(2+j)e^{-j2t} + (2-j)e^{j2t}\right]
\end{aligned}$$

Avec la relation d'Euler,

$$\begin{aligned}
f(t) &= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(-2t) + j\sin(-2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\
&= 0.6 - 0.15e^{-t}[(2+j)(\cos(2t) - j\sin(2t)) + (2-j)(\cos(2t) + j\sin(2t))] \\
&= 0.6 - 0.15e^{-t}(4\cos 2t + 2\sin 2t) \\
&= 0.6 - 0.6e^{-t}(\cos 2t + 0.5\sin 2t) \\
&= 0.6 - 0.671e^{-t}\cos(2t - 26.57^\circ)
\end{aligned}$$

C'est la même solution que celle obtenue plus haut.

2.2 Fonction de transfert

Soit un système quelconque, donné par la figure 2.1.

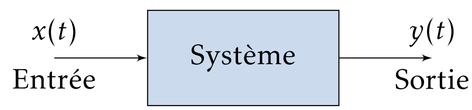


FIGURE 2.1 – Exemple de système

La fonction de transfert d'un système est donnée par :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{2.10}$$

Elle permet de relier la sortie d'un système à son entrée.

Pour les expressions de modélisation,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \tag{2.11}$$

Habituellement, $n \geq m$.

La fonction de transfert est une représentation mathématique d'un système. Cette fonction peut être une représentation de divers systèmes (mécanique, électrique, etc..).

On obtient la fonction de transfert d'un système à partir des équations différentielles qui décrivent ce système, avec des conditions initiales nulles. C'est un modèle du système, *indépendant du signal d'entrée et de l'amplitude* (et donc un système linéaire).

On peut appliquer un signal d'entrée quelconque et mesurer le signal à la sortie et ainsi déterminer la fonction de transfert du système. Quelle fonction facilitera la détermination de la fonction de transfert du système ?

Rappel : $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

Soit un système avec une fonction de transfert $f(t)$, ou dans le domaine fréquentiel, $F(s)$. Si on applique une entrée impulsion $\delta(t)$, la fonction de transfert devient :

$$\mathcal{L}[\delta(t) f(t)] = 1 \cdot F(s) = F(s) \tag{2.12}$$

Et donc la fonction inverse est :

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \tag{2.13}$$

$\rightarrow$ La fonction de transfert d'un système est exactement la transformée de Laplace de la sortie si l'entrée est une impulsion $\delta(t)$.

2.3 Modélisation des systèmes

On se sert des fonctions de transfert pour modéliser les systèmes électriques, mécaniques, et électromécaniques. Les lois physiques relatives à ces systèmes seront utilisées, à l'aide de techniques d'analyse spécialisées pour simplifier les calculs. On commence d'abord avec les systèmes électriques.

2.3.1 Systèmes électriques

Les éléments des systèmes électriques sont donnés dans le tableau 2.3.

Tableau 2.3 – Éléments du système électrique

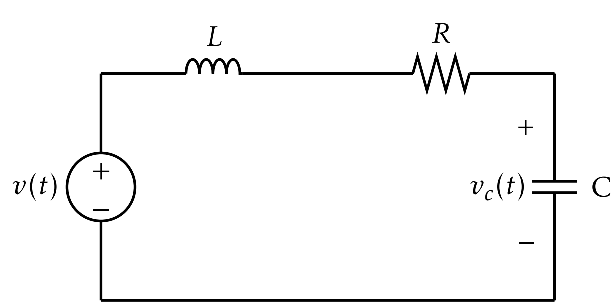
Élément	**Tension**	**Courant**	**Impédance**
Résistance R	Ri	$\dfrac{v}{R}$	R
Inductance L	$L\dfrac{di}{dt}$	$\dfrac{1}{L}\int v dt$	sL
Condensateur C	$\dfrac{1}{C}\int i dt$	$C\dfrac{dv}{dt}$	$\dfrac{1}{sC}$

Pour résoudre des problèmes de circuits électriques, on se sert de trois lois principales :

1. Loi d'Ohm, $v = Ri$
2. Loi de Kirchhoff, courant : somme des courants à un noeud est zéro.
3. Loi de Kirchhoff, tension : somme des tensions dans une maille est zéro.

Exemple 3

Soit le circuit suivant. Calculer la fonction de transfert qui relie la tension $V_c(s)$ à $V(s)$.



On utilise un diviseur de tension :

$$V_c(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} V(s)$$

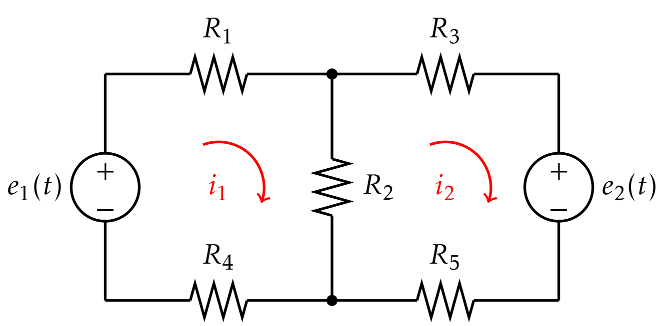
La fonction de transfert est :

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{sL + R + \frac{1}{sC}} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

On peut simplifier l'analyse de circuits en utilisant la méthode des mailles ou des noeuds.

Méthode des mailles

Soit le circuit suivant :



Les équations sont :

$$\begin{aligned} R_1 i_1 + R_2(i_1 - i_2) + R_4 i_1 &= e_1 \\ R_3 i_2 + R_5 i_2 + R_2(i_2 - i_1) &= -e_2 \end{aligned}$$

qu'on peut ré-organiser :

$$\begin{aligned} (R_1 + R_2 + R_4)i_1 - R_2 i_2 &= e_1 \\ -R_2 i_1 + (R_2 + R_3 + R_5)i_2 &= -e_2 \end{aligned}$$

De façon matricielle,

$$\begin{bmatrix} R_1 + R_2 + R_4 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ -e_2 \end{bmatrix}$$

Si on analyse la dernière équation de plus près, on remarque que l'élément (1,1) de la matrice des résistances est la somme dans éléments contenus dans la maille 1. L'élément (2,2) représente la somme des élément de la maille 2. Les éléments (1,2) et (2,1) sont les éléments communs aux mailles 1 et 2, avec un signe négatif.

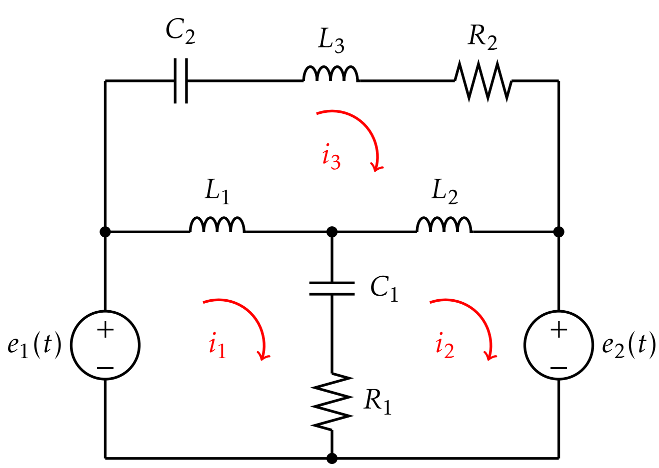
La forme générale est :

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}\Sigma Z \\ \text{de } m_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\Sigma Z \text{ communs,} \\ m_1, m_2\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}-\Sigma Z \text{ communs,} \\ m_1, m_n\end{matrix} \\ \vdots & \begin{matrix}\Sigma Z \\ \text{de } m_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\Sigma Z \\ \text{de } m_n\end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\Sigma\text{sources de} \\ \text{la maille 1}\end{matrix} \\ \begin{matrix}\Sigma\text{sources de} \\ \text{la maille 2}\end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix}\Sigma\text{sources de} \\ \text{la maille } n\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

On utilise les techniques de résolution matricielles pour résoudre le problème et trouver la fonction de transfert voulue.

Exemple 4

Soit le circuit suivant.



Écrire l'équation des mailles.

Par inspection :

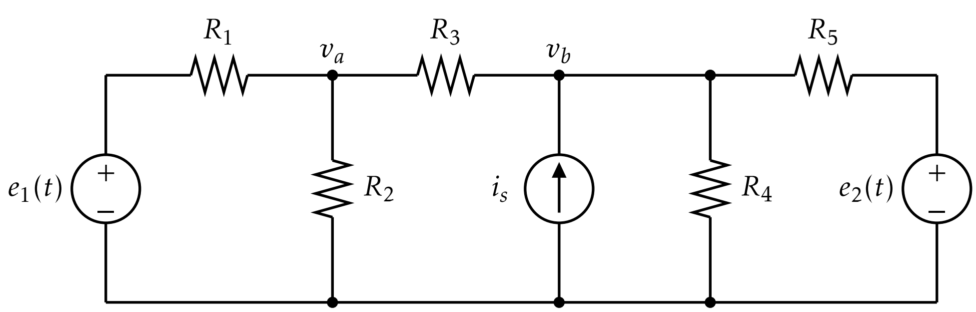
$$\begin{bmatrix} sL_1+\frac{1}{sC_1}+R_1 & -(R_1+\frac{1}{sC_1}) & -sL_1 \\ -(R_1+\frac{1}{sC_1}) & sL_2+\frac{1}{sC_1}+R_1 & -sL_2 \\ -sL_1 & -sL_2 & \frac{1}{sC_2}+R_2+s(L_1+L_2+L_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ -e_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On peut utiliser la méthode des noeuds pour solutionner des circuits. La technique d'analyse est la même, sauf qu'on utilise les admittances au lieu des impédances.

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix}\Sigma Y \\ \text{de } m_1\end{matrix} & \begin{matrix}-\Sigma Y\text{communs,} \\ m_1, m_2\end{matrix} & \cdots & \begin{matrix}-\Sigma Y\text{communs,} \\ m_1, m_n\end{matrix} \\ \vdots & \begin{matrix}\Sigma Y \\ \text{de } m_2\end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix}\Sigma Y \\ \text{de } m_n\end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix}\Sigma\text{sources du} \\ \text{noeud } 1\end{matrix} \\ \begin{matrix}\Sigma\text{sources du} \\ \text{noeud } 2\end{matrix} \\ \vdots \\ \begin{matrix}\Sigma\text{sources du} \\ \text{noeud } n\end{matrix} \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

EXEMPLE 5

Soit le circuit suivant.



Écrire l'équation des noeuds.

Par inspection :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_1}{R_1} \\ \frac{e_2}{R_5}+i_s \end{bmatrix}$$

2.3.2 Systèmes mécaniques

Dans les systèmes mécaniques, il y a deux types de mouvement : translation et rotation. On verra chacun de ces systèmes séparément. Pour résoudre, on utilise les lois de Newton : la somme des forces sur un corps est nulle (pour les systèmes en translation) et la somme des moments est nulle (pour les systèmes en rotation).

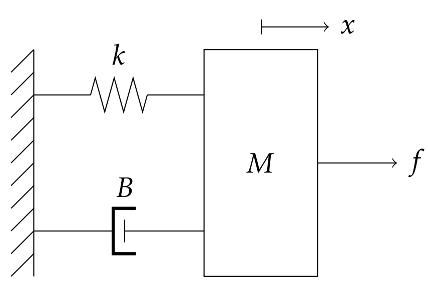
Les éléments du système de translation sont présentés dans le tableau 2.4.

TABLEAU 2.4 – Éléments du système de translation

Élément	**Force : vitesse**	**Force : déplacement**	**Impédance**
Ressort k	$f(t) = k\int_0^t v(\tau)d\tau$	$f(t) = kx(t)$	k
Amortissement B	$f(t) = Bv(t)$	$f(t) = B\dfrac{dx(t)}{dt}$	sB
Masse M	$f(t) = M\dfrac{dv(t)}{dt}$	$f(t) = M\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$	s^2M

EXEMPLE 6

Soit le système suivant :



Écrire l'équation qui relie la position $X(s)$ à la force appliquée $F(s)$.

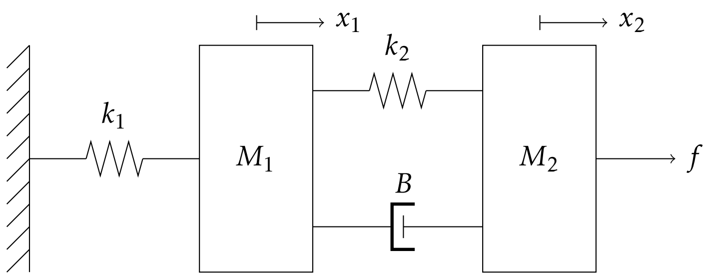
La somme des forces est nulle : $f - f_M - f_B - f_k = 0$. Si on substitue les impédances,

$$F(s) = s^2MX(s) + sBX(s) + kX(s)$$

Et la fonction de transfert :

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2M + sB + k}$$

Exemple 7



Écrire l'équation des mailles.

Par inspection :

$$\begin{bmatrix} s^2M_1 + sB + k_1 + k_2 & -(sB + k_2) \\ -(sB + k_2) & s^2M_2 + sB + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Système de rotation

Les éléments du système de rotation sont présentés dans le tableau 2.5.

Tableau 2.5 – Éléments du système de rotation

Élément	**Torque : ω**	**Torque : θ**	**Impédance**
Ressort k	$T(t) = k\int_0^t \omega(\tau)d\tau$	$T(t) = k\theta(t)$	k
Amortissement D	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D\dfrac{d\theta(t)}{dt}$	sD
Inertie J	$T(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J\dfrac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	s^2J

Engrenages

Les engrenages sont très souvent utilisés dans les systèmes avec moteurs. Ils permettent d'échanger de la vitesse pour un couple, ou vice-versa. Le comportement idéal d'engrenages est donné par la relation suivante :

$$\frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2} \tag{2.16}$$

où θ est le déplacement angulaire, r est le rayon de l'engrenage, et N est le nombre de dents de l'engrenage.

La relation entre les couples est :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{N_2}{N_1} \tag{2.17}$$

2.3.3 Systèmes électromécaniques

Les systèmes électromécaniques sont une combinaison des systèmes mécaniques et électriques, où le couplage se fait par champ magnétique. On parle ici principalement des moteurs.

Modèle de la machine à courant continu

On utilise la machine à courant continu comme exemple.

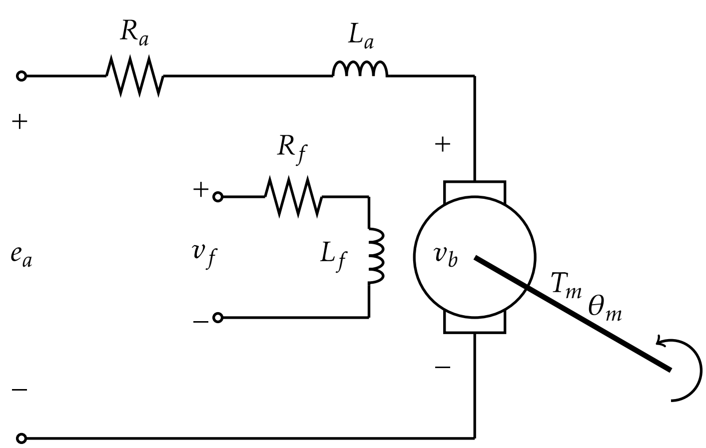


Figure 2.2 – Modèle de la machine à courant continu

En appliquant la LKV, on a les relations suivantes :

$$L_a \frac{di}{dt} + R_a i + v_b = e_a \tag{2.18}$$

où la tension v_b est la force électromotive, qui est donnée par :

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \Rightarrow V_b(s) = sK_b\Theta(s) \tag{2.19}$$

Le couple développé par le moteur est proportionnel au courant de l'armature :

$$T_m(s) = K_t I_a(s) \tag{2.20}$$

de façon générale, $K_t = K_b$.

Comme première étape, la relation entre la tension d'entrée E_a et l'angle de sortie $\Theta_m(s)$ est :

$$\frac{(R_a + sL_a)T_m(s)}{K_t} + sK_b\Theta_m(s) = E_a(s) \tag{2.21}$$

Du côté mécanique, le moteur possède une inertie J_m et un amortissement D_m, ce qui donne :

$$T_m(s) = (s^2 J_m + sD_m)\Theta_m(s) \tag{2.22}$$

On peut combiner et simplifier pour obtenir :

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_a(s)} = \frac{K_t/(R_a J_m)}{s\left[s + \frac{1}{J_m}\left(D_m + \frac{K_t K_b}{R_a}\right)\right]} \tag{2.23}$$

Les constantes du moteur peuvent être obtenues à partir de la courbe de couple en fonction de la vitesse du moteur. Un exemple est montré à la figure 2.3, où T_{dec} représente le couple de décrochage, et ω_{sc} est la vitesse du moteur sans charge.

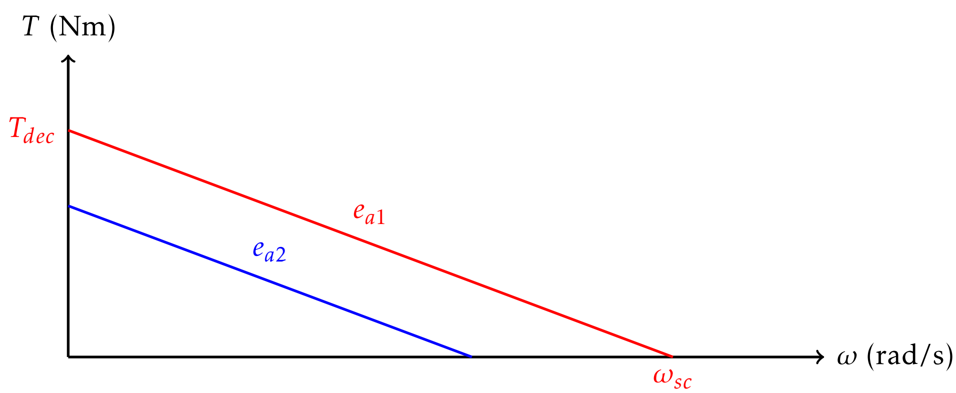


FIGURE 2.3 – Exemple de courbe couple-vitesse d'un moteur, selon la tension e_a

D'après la figure 2.3, on peut calculer les constantes du moteur selon :

$$\frac{K_t}{R_a} = \frac{T_{dec}}{e_a} \tag{2.24}$$

et

$$K_b = \frac{e_a}{\omega_{sc}} \tag{2.25}$$

2.4 Linéarisation

Dans plusieurs systèmes, le comportement de un ou plusieurs composantes n'est pas linéaire. Toutes les méthodes et techniques vues précédemment supposent que les systèmes sont linéaires.

Que faire alors si certains composants non-linéaires sont présents dans le système ?

→ Pour appliquer les méthodes vues ici, il faudra linéariser le système. Lorsqu'on linéarise un système, on le fait seulement pour une entrée spécifique.

Soit la fonction $f(x)$ de la figure 2.4. Le système opère au point A.

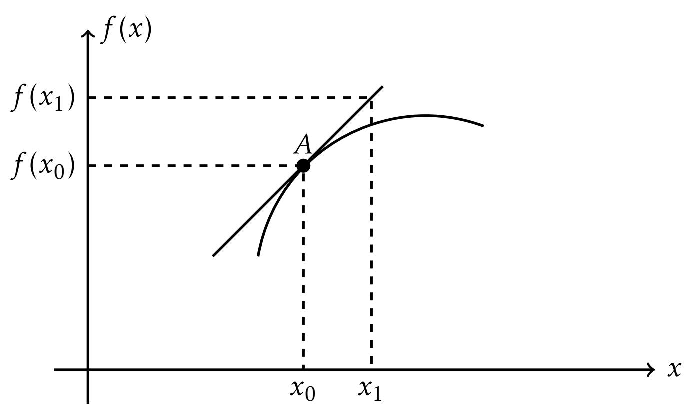


Figure 2.4 – Exemple de linéarisation de fonction

On prend la pente au point A pour créer une ligne droite. La pente est m_a. Si on fait varier (faiblement) la point A le long de cette ligne, la différence entre la valeur réelle et la valeur "linéarisée" sera faible.

$$[f(x_1) - f(x_0)] \approx m_a(x_1 - x_0) \tag{2.26}$$

ou

$$\delta f(x) \approx m_a \delta x \tag{2.27}$$

On peut écrire d'une autre façon :

$$f(x) \approx f(x_0) + m(x_1 - x_0) \approx f(x_0) + m_a \delta x \tag{2.28}$$

Exemple 8

Linéariser $f(x) = 5\cos x$ au point $x = \frac{\pi}{2}$.

On prend la dérivée de la fonction au point recherché pour trouver la pente.

$$\left.\frac{d(5\cos x)}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{2}} = -5\sin x\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = -5$$

Au point recherché, $f(x_0) = 5\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Donc,

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(x_0) + m_a \delta x \\ &= 0 - 5\delta x \\ &= -5\delta x \end{aligned}$$

Sur la figure 2.5, on voit bien que la fonction ressemble à la ligne droite au point recherché.

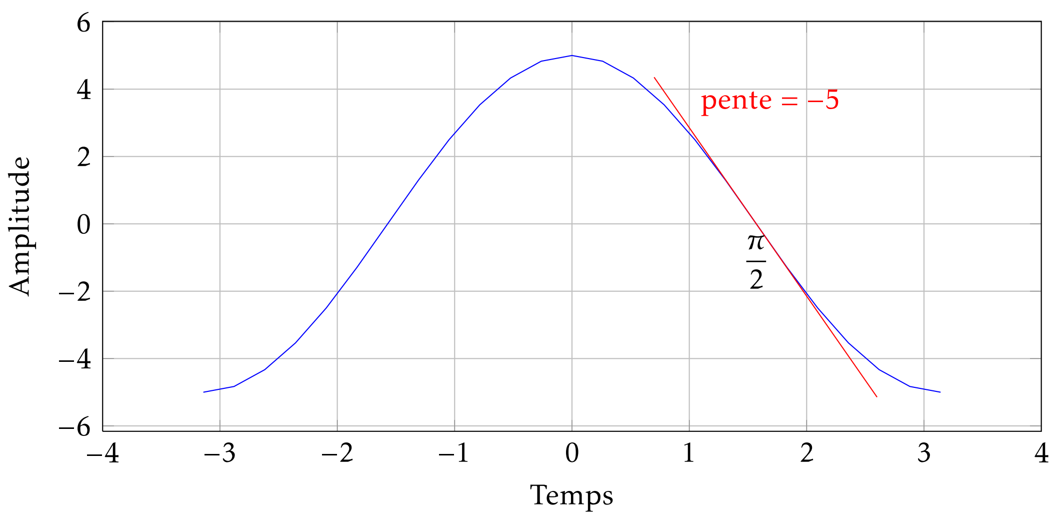


Figure 2.5 – Fonction linéarisée

On peut formaliser ce processus en utilisant une expansion en séries de Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} + \frac{(x-x_0)^2}{2!} \cdot \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} + \cdots \tag{2.29}$$

Si x varie peu de x_0, on peut négliger les termes d'ordre supérieur.

$$f(x) - f(x_0) \approx (x - x_0) \cdot \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=x_0} \tag{2.30}$$

$$\delta f(x) = m\Big|_{x=x_0} \delta x \tag{2.31}$$

EXEMPLE 9

Linéariser

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \cos x = 0$$

au point $x = \frac{\pi}{4}$.

Le terme $\cos x$ rend l'équation non-linéaire.

On remplace $x = \delta x + \frac{\pi}{4}$ et on substitue.

$$\frac{d^2(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt^2} + 2\frac{d(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt} + \cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Mais,

$$\frac{d(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$$

et

$$\frac{d^2(\delta x + \frac{\pi}{4})}{dt^2} = \frac{d^2 \delta x}{dt}$$

et on linéarise le terme $\cos(\delta x + \frac{\pi}{4})$ en utilisant une série de Taylor :

$$\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left.\frac{d \cos x}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} \delta x = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x$$

ce qui donne,

$$\begin{aligned}\cos\left(\delta x + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\delta x \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x\end{aligned}$$

Et l'équation linéarisée est :

$$\frac{d^2 \delta x}{dt^2} + 2\frac{d\delta x}{dt} + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Annexe

Soit une transformée de Laplace de la forme :

$$G(s) = \frac{a + jb}{s + (c + jd)} + \frac{a - jd}{s + (c - jd)} \tag{2.32}$$

La transformée inverse de cette fonction est :

$$g(t) = (a + jb)e^{-(c+jd)t} + (a - jb)e^{-(c-jd)t} \tag{2.33}$$

On peut développer cette équation :

$$g(t) = e^{-ct}\left((a + jb)e^{-jdt} + (a - jb)e^{jdt}\right) \tag{2.34}$$

ou

$$g(t) = e^{-ct}\left(ae^{-jdt} + ae^{jdt} + jbe^{-jdt} - jbe^{jdt}\right) \tag{2.35}$$

qu'on peut transformer à :

$$g(t) = e^{-ct}\left[2a\left(\frac{e^{jdt} + e^{-jdt}}{2}\right) + 2b\left(\frac{e^{jdt} - e^{-jdt}}{j2}\right)\right] \tag{2.36}$$

et à l'aide de la relation d'Euler,

$$g(t) = 2e^{-ct}\left(a\cos(dt) + b\sin(dt)\right) \tag{2.37}$$

On peut factoriser l'équation précédente de la façon suivante :

$$g(t) = 2e^{-ct}\sqrt{(a^2 + b^2)}\left(\frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\cos(dt) + \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\sin(dt)\right) \tag{2.38}$$

Les termes devant les cosinus et sinus forment les équations d'un triangle de coté a et b et d'hypoténuse $\sqrt{(a^2 + b^2)}$. On définit :

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \qquad \text{et} \qquad \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \tag{2.39}$$

On peut donc réduire l'équation 2.38 à :

$$g(t) = 2e^{-ct}\sqrt{(a^2 + b^2)}(\cos\phi\cos(dt) + \sin\phi\sin(dt)) \tag{2.40}$$

Et à l'aide d'identités trigonométriques,

$$g(t) = 2e^{-ct}\sqrt{(a^2 + b^2)}(\cos(dt - \phi)) \tag{2.41}$$

où

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{2.42}$$