Chapitre 3

Réponse dans le domaine temporel

On étudie ici le comportement des systèmes de premier et second ordre et leur réponse en fonction du temps. Les caractéristiques de ces systèmes sont étudiés en détail, ainsi que leur réponse, et certaines techniques d'analyse.

On verra aussi comment approximer des systèmes d'ordre supérieur en systèmes de deuxième ordre.

3.1 Pôles, zéros et réponse

Soit la fonction de transfert suivante :

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_0} \tag{3.1}$$

ou

$$= \frac{(s - z_1)(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\cdots(s - p_n)} \tag{3.2}$$

où $n \geq m$.

Définition :

Zéro : Cause la fonction de transfert à devenir zéro $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

Pôle : Où la fonction de transfert devient infinie $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

On peut représenter les pôles et zéros par un diagramme. Ce diagramme donne de l'information sur le type de système et le type de réponse du système, et peut être une façon rapide d'analyser un système.

On démontre par un exemple. Soit la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{s+2}{s+5} \tag{3.3}$$

Le zéro est $z_1 = -2$ et le pôle est $p_1 = -5$. Le diagramme des pôles est donné dans la figure 3.1. Le zéro est représenté par un cercle (“o”), et le pôle par une croix (“×”).

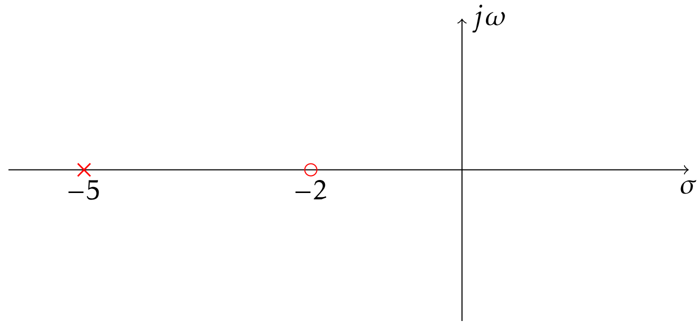


FIGURE 3.1 – Diagramme de pôles et zéros

Pour montrer l'effet des pôles sur un système, on prend la réponse échelon à $G(s)$.

$$C(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{(s+2)}{s(s+5)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+5}$$

Les coefficients sont :

$$A = \left.\frac{s+2}{s+5}\right|_{s=0} = 0.4$$

$$B = \left.\frac{s+2}{s}\right|_{s=-5} = 0.6$$

Donc,

$$C(s) = \frac{0.4}{s} + \frac{0.6}{s+5}$$

et

$$c(t) = \underbrace{0.4}_{\text{réponse forcée}} + \underbrace{0.6e^{-5t}}_{\text{réponse naturelle}}$$

COMMENTAIRES :

- Le pôle à l'entrée génère la réponse forcée (le terme $\frac{0.4}{s}$).
- Le pôle de la fonction de transfert génère la réponse naturelle.
- Les pôles et zéros génèrent les amplitudes des deux réponses.

3.2 Système de premier ordre

Soit un système de premier ordre sans zéro, donné par la figure 3.2 :

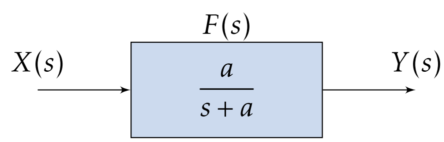


FIGURE 3.2 – Système de premier ordre

Si l'entrée au système est un échelon,

$$Y(s) = \frac{a}{s+a} \cdot \frac{1}{s} \tag{3.4}$$

et dans le domaine du temps,

$$y(t) = 1 - e^{-at} = y_f(t) + y_n(t) \tag{3.5}$$

On peut générer la réponse de ce système. Un exemple est montré à la figure 3.3, pour $a = 1.2$.

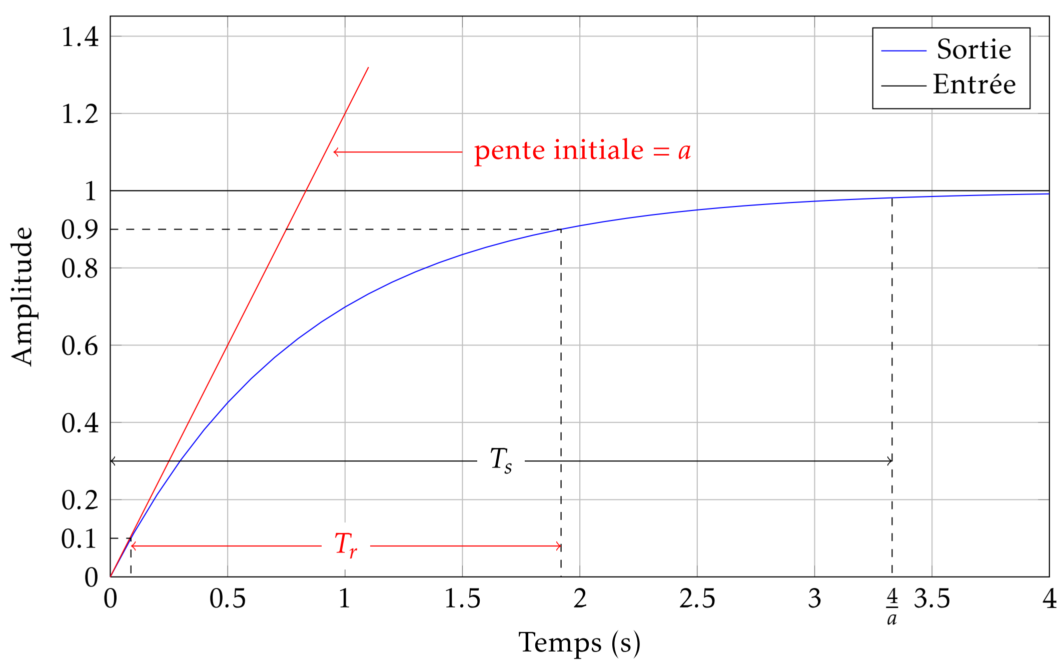


FIGURE 3.3 – Réponse à une entrée échelon d'un système de 1^{er} ordre.

Constante de temps

La constante de temps est le temps requis pour que e^{-at} diminue jusqu'à 37% de la valeur initiale. Ou, en d'autre mots, c'est le temps nécessaire pour que $y(t)$ atteigne 67% de sa valeur finale. La constante de temps est donc :

$$t_0 = \frac{1}{a} \tag{3.6}$$

Puisque la pente initiale est a, la constante de temps est un indicateur de la vitesse de réponse du système.

Temps de montée

Le temps de montée est définit comme le temps requis pour que la fonction passe de 10% à 90% de sa valeur finale. Ce qui veut dire :

$$T_r = t_{0.9} - t_{0.1} \tag{3.7}$$

On trouve les deux valeurs de temps :

$$0.9 = 1 - e^{-at} \Rightarrow t_{0.9} = \frac{2.31}{a} \tag{3.8}$$

$$0.1 = 1 - e^{-at} \Rightarrow t_{0.1} = \frac{0.11}{a} \tag{3.9}$$

Le temps de montée est donc,

$$T_r = \frac{2.31}{a} - \frac{0.11}{a} = \frac{2.2}{a} \tag{3.10}$$

Temps de stabilisation

C'est le temps requis pour que la réponse soit à 2% de la valeur finale (et demeure là). C'est le temps où $c(t) = 0.98$.

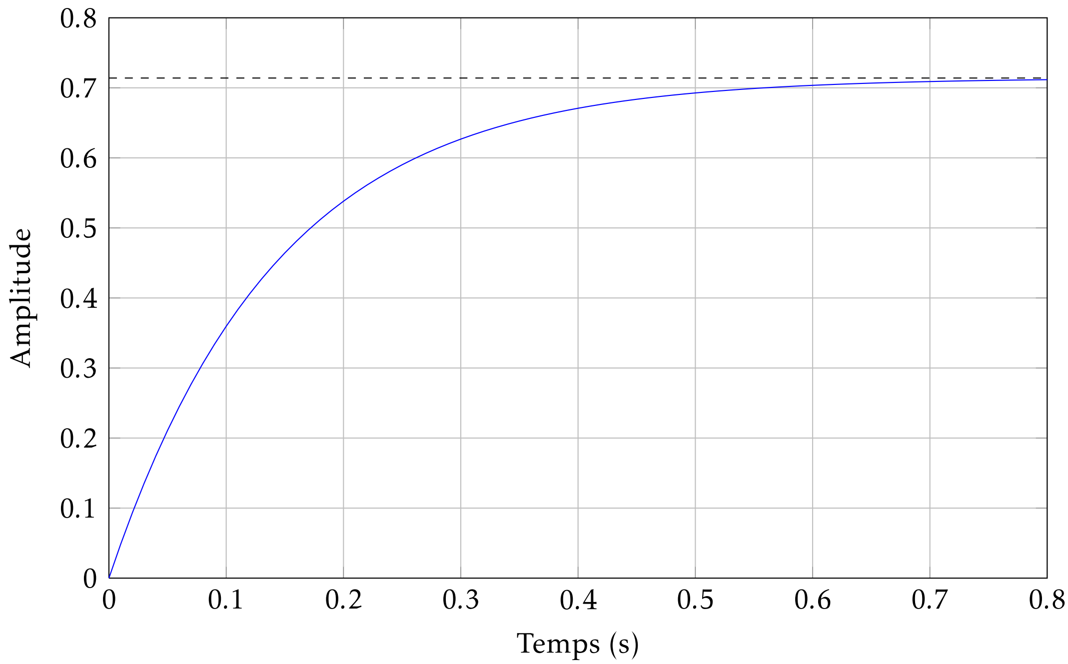
$$0.98 = 1 - e^{-at} \Rightarrow T_s = \frac{4}{a} \tag{3.11}$$

Réponse du premier ordre par expérimentation

Il est relativement facile de déterminer les paramètres d'un système du premier ordre par expérimentation. Il suffit de mesurer la réponse du système à une entrée échelon.

Exemple 1

Soit la réponse suivante, mesurée pour un système quelconque.
Donner la fonction de transfert.



Le système doit avoir la forme :

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

La sortie à une entrée échelon est :

$$Y(s) = \frac{K}{s(s+a)} = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{s+a}$$

En premier lieu, on calcule la constante de temps. C'est le temps requis pour atteindre 63% de la valeur finale (environ 0.72 pour ce système) :

$$y_{t_0} = 0.72 \cdot 0.63 = 0.45$$

Selon le graphe, $y(t) = 0.45$ à environ 0.13s, donc

$$a = \frac{1}{t_0} = 7.7$$

Pour trouver K, on remarque que la valeur finale est K/a selon l'équation de $Y(s)$. Donc

$$K = a \cdot y(\infty) = (7.7)(0.72) = 5.54$$

La fonction de transfert est

$$G(s) = \frac{5.54}{s + 7.7}$$

Il est intéressant de noter que la figure ci-haut fut générée avec la fonction

$$\frac{5}{s+7}$$

3.3 Systèmes de deuxième ordre : introduction

L'analyse des systèmes de second ordre est plus complexe que celle des systèmes de premier ordre. Pour les systèmes de premier ordre, seul le temps de réponse pouvait changer si on variait les paramètres. Pour les systèmes de deuxième ordre, la forme de la réponse peut varier.

L'équation générale des systèmes de deuxième ordre est :

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + sa + b} \tag{3.12}$$

On va examiner de plus près les différentes réponses possibles et comment elles sont reliées au pôles. Les réponses décrites plus bas sont tous des réponses à une entrée échelon. Pour chaque type de réponse, on utilise un exemple pour montrer le comportement.

Il faut noter qu'on étudie ici une fonction de deuxième ordre *sans zéro*. Le terme au numérateur ne sert qu'à modifier l'amplitude de la réponse. On regardera l'effet d'un zéro sur ces systèmes à la fin du chapitre.

a. Sur-amorti

Soit la fonction suivante :

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2 + 9s + 9)} = \frac{9}{s(s + 7.854)(s + 1.146)}$$

On obtient le diagramme des pôles et la réponse du système à une entrée échelon à la figure 3.4. Les pôles sont $p_1 = -7.854$ et $p_2 = -1.146$.

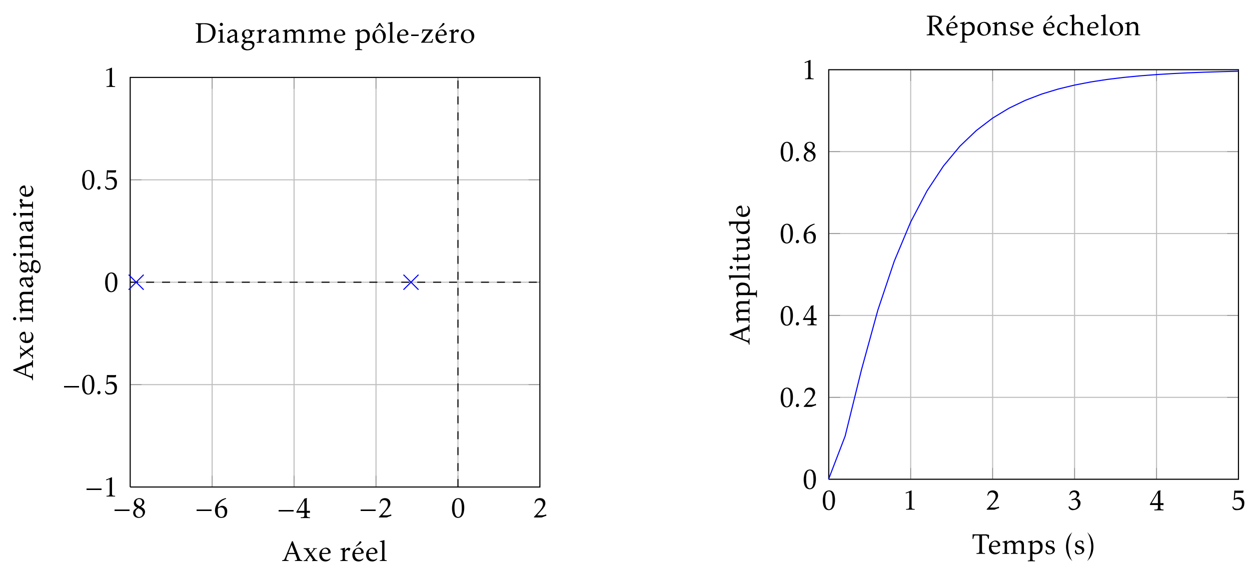


FIGURE 3.4 – Réponse d'une fonction sur-amortie

La réponse de ce système est

$$c(t) = 1 + 0.171e^{-7.854t} - 1.17e^{-1.146t}$$

NOTE :
- Chacun des pôles du système génère un exponentiel.
- Il n'y a aucune oscillation.

b. Sous-amorti

Soit la fonction suivante :

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+2s+9)}$$

On obtient le diagramme des pôles et la réponse du système à une entrée échelon à la figure 3.5. Les pôles sont $p_1 = -1 + j\sqrt{8}$ et $p_2 = -1 - j\sqrt{8}$. On remarque dans la figure 3.5 qu'il y a un peu d'oscillations dans la réponse. En effet, l'exponentiel présent atténue les oscillations après un certain temps.

La réponse de ce système est

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-t}\left(\cos(\sqrt{8}t) + \frac{\sqrt{8}}{8}\sin(\sqrt{8}t)\right) \\ &= 1 - 1.06e^{-t}\cos(\sqrt{8}t - 19.47°) \end{aligned}$$

NOTE :

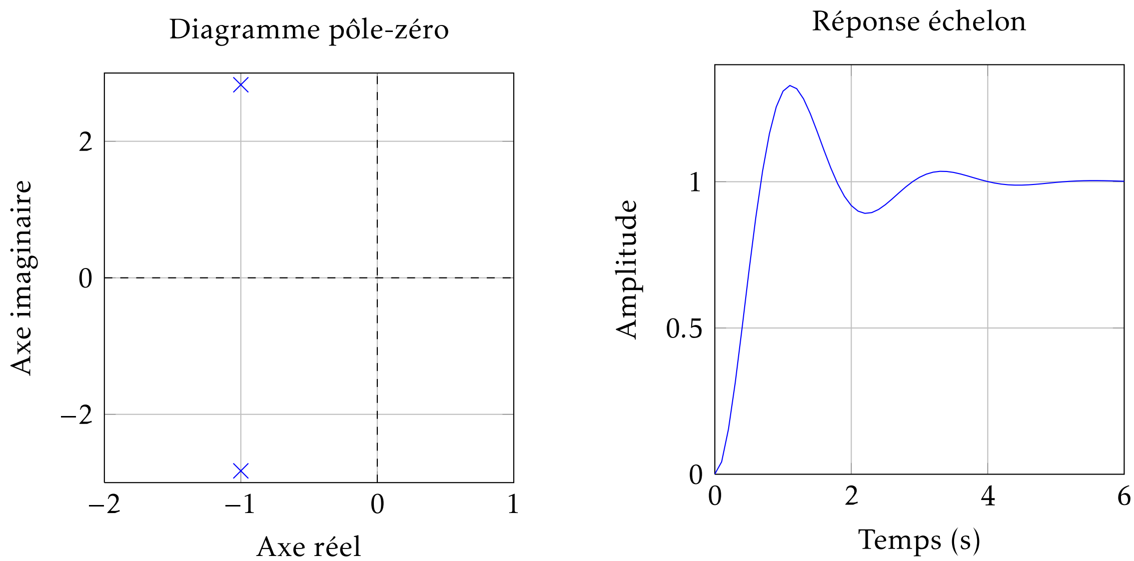


Figure 3.5 – Réponse d'une fonction sous-amortie

- La partie réelle des pôles représente la fréquence de l'exponentiel et la partie imaginaire est la fréquence du cosinus.

c. Amortissement critique

Soit la fonction suivante :

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+6s+9)} = \frac{9}{s(s+3)^2}$$

On obtient le diagramme des pôles et la réponse du système à une entrée échelon à la figure 3.6. Les pôles sont $p_{1,2} = -3$. Il n'y a pas d'oscillations dans ce type de système.

La réponse de ce système est

$$c(t) = 1 - 3te^{-3t} - e^{-3t}$$

Note :

- Chacun des pôles du système génère un exponentiel, sauf qu'un des exponentiel est multiplié par t.
- Il n'y a pas d'oscillations.

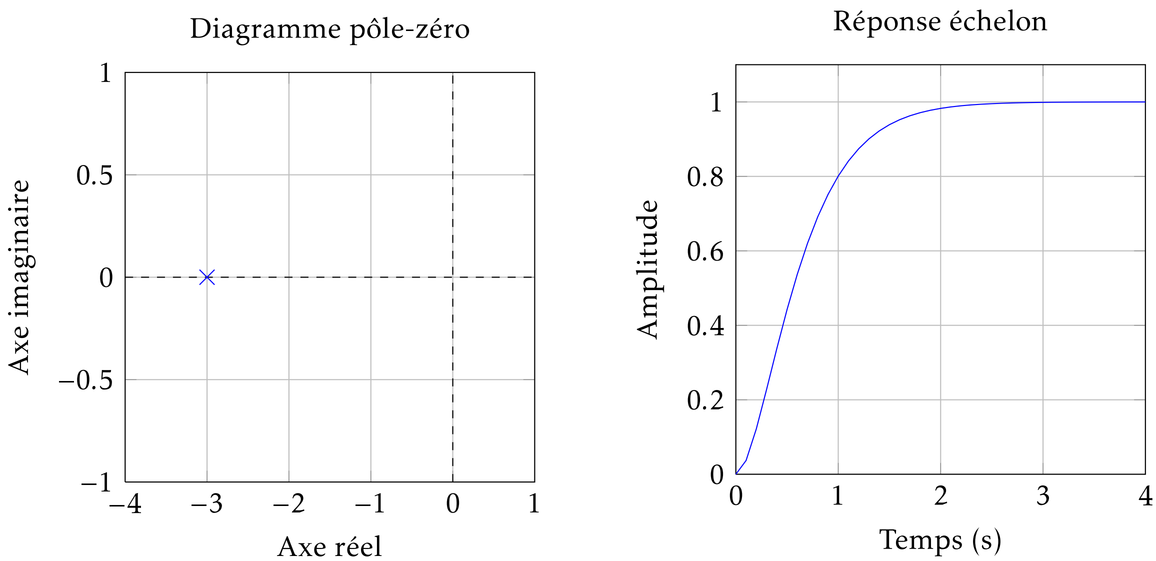


FIGURE 3.6 – Réponse d'une fonction à amortissement critique

d. Sans amortissement

Soit la fonction suivante :

$$C(s) = \frac{9}{s(s^2+9)}$$

On obtient le diagramme des pôles et la réponse du système à une entrée échelon de la figure 3.7. Les pôles sont $p_{1,2} = \pm j3$. Puisque les parties réelles sont nulles, il n'y a aucun exponentiel pour atténuer les oscillations. Le système oscille donc sans s'atténuer.

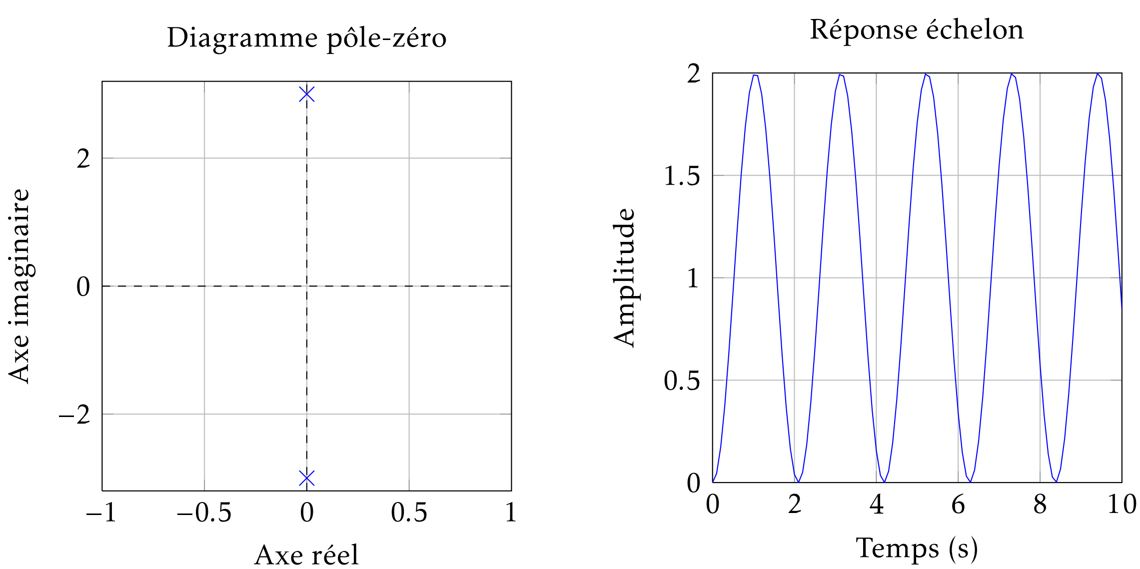


FIGURE 3.7 – Réponse d'une fonction sans amortissement.

La réponse de ce système est

$$c(t) = 1 - \cos(3t)$$

NOTE :

- Les pôles représentent la fréquence du cosinus.

Résumé

- La partie réelle d'un pôle génère un exponentiel.
- La partie imaginaire d'un pôle génère un cosinus.
- Cas particulier :
  - Lorsque les pôles sont réels et doubles, un des exponentiels est multiplié par un facteur t.

3.4 Système de deuxième ordre général

On définit deux paramètres importants pour les systèmes de deuxième ordre : la fréquence naturelle et l'amortissement.

Fréquence naturelle ω_n : La fréquence naturelle est la fréquence d'oscillation du système sans amortissement.

Amortissement ζ : L'amortissement représente la partie du système qui fait diminuer l'amplitude des oscillations.

$$\zeta = \frac{\text{fréquence de l'exponentiel}}{\text{fréquence naturelle}} \tag{3.13}$$

Soit une fonction de deuxième ordre quelconque :

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b} \tag{3.14}$$

Sans amortissement, les pôles seraient sur l'axe imaginaire seulement, et la réponse serait un sinusoïde. Selon $G(s)$, pour que les pôles soient imaginaires, $a = 0$. Donc la fonction serait

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b} \tag{3.15}$$

Par définition, la fréquence naturelle est la fréquence d'oscillation du système. Les pôles, selon l'équation 3.15, sont $p_{1,2} = \pm j\sqrt{b}$. La fréquence naturelle est alors :

$$\omega_n = \sqrt{b} \tag{3.16}$$

ou

$$b = \omega_n^2 \tag{3.17}$$

Pour trouver a, on sait que dans un système amorti, la fréquence de l'exponentiel est σ. Dans un système de deuxième ordre, $\sigma = -\frac{a}{2}$. Donc :

$$\zeta = \frac{|\frac{a}{2}|}{\omega_n} = \frac{a}{2\omega_n} \tag{3.18}$$

ou

$$a = 2\zeta\omega_n \tag{3.19}$$

On peut écrire l'équation générale d'un système de deuxième ordre en fonction de ces nouveaux coefficients :

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.20}$$

Exemple 2

Soit la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36}$$

Trouver ζ et ω_n.

$$\omega_n = \sqrt{b} = 6$$

$$2\zeta\omega_n = 4.2 \Rightarrow \zeta = 0.35$$

Le système est sous-amorti.

Selon l'équation 3.20, les pôles de la fonction sont

$$s_{1,\,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{3.21}$$

TABLE 3.1 – Type de réponse selon ζ

ζ	**Pôles**	**Type de réponse**
$\zeta = 0$	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$	Sans amortissement
$0 < \zeta < 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	Sous-amorti
$\zeta = 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n$	Amortissement critique
$\zeta > 1$	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	Sur-amorti

Selon la valeur de ζ, la réponse du système sera différente. Le tableau 3.1 montre les différentes réponses selon la valeur de ζ.

EXEMPLE 3

Soit trois fonctions :

$$A(s) = \frac{12}{s^2+8s+12} \qquad B(s) = \frac{16}{s^2+8s+16}$$
$$C(s) = \frac{20}{s^2+8s+20}$$

Trouver ζ et dire quel type de réponse.

On sait que

$$\zeta = \frac{a}{2\sqrt{b}}$$

a.
$$\zeta = \frac{8}{2\sqrt{12}} = 1.155 \Rightarrow \text{ sur-amorti}$$

b.
$$\zeta = \frac{8}{2\sqrt{16}} = 1.0 \Rightarrow \text{ amortissement critique}$$

c.
$$\zeta = \frac{8}{2\sqrt{20}} = 0.894 \Rightarrow \text{ sous-amorti}$$

3.5 Systèmes de deuxième ordre sous-amortis

Les systèmes sous-amortis de deuxième ordre sont présents dans plusieurs systèmes physiques naturels. Pour bien comprendre leur comportement, on analysera en détail ce type de système.

On commence en trouvant la réponse échelon.

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{3.22}$$

On suppose que $\zeta < 1$.

La transformée inverse [1] de cette equation donne :

$$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cos\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t - \phi\right) \tag{3.23}$$

où

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \tag{3.24}$$

La figure 3.8 montre les différentes réponses selon la valeur de ζ.

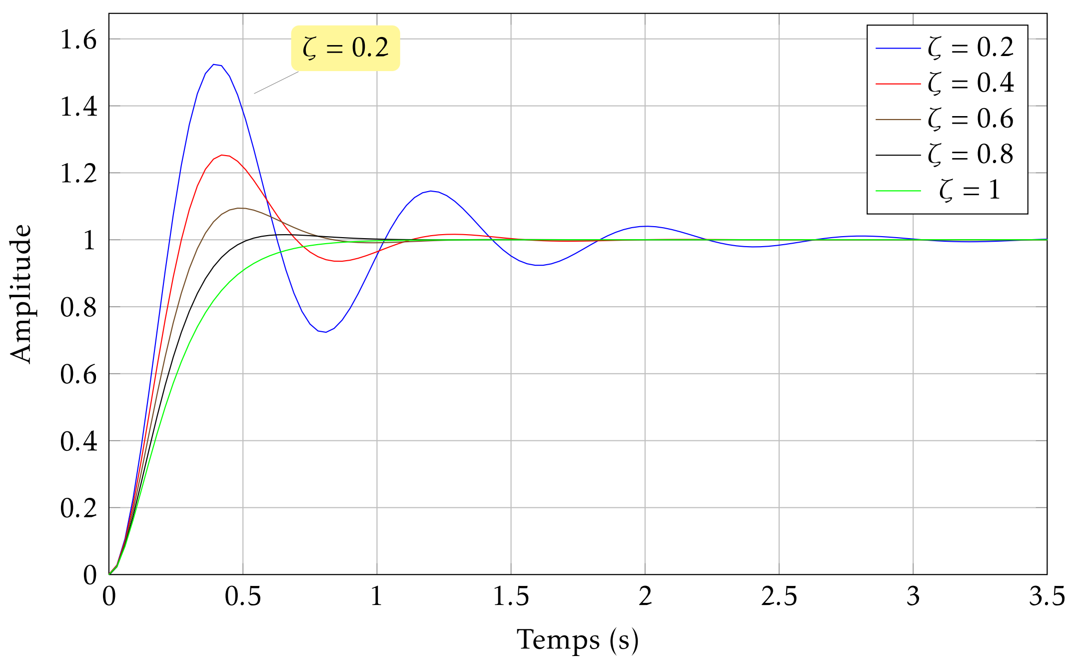


FIGURE 3.8 – Réponse d'une fonction sous-amortie, $\zeta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ et 1

On a déjà 2 paramètres pour définir les systèmes de deuxième ordre. On va ajouter 4 autres paramètres :

1. T_p : Temps requis pour atteindre le premier maximum.
2. M_p : Pourcentage de dépassement. Le montant de dépassement maximal de la valeur finale.

1. La démonstration est laissée comme exercice pour l'étudiant.

3. T_s : Temps de stabilisation. Temps requis pour que la réponse soit à 2% de la valeur finale.
4. T_r : Temps de montée. Temps nécessaire pour aller de 10% à 90% de la valeur finale.

On peut montrer ces quatre paramètres dans la figure 3.9.

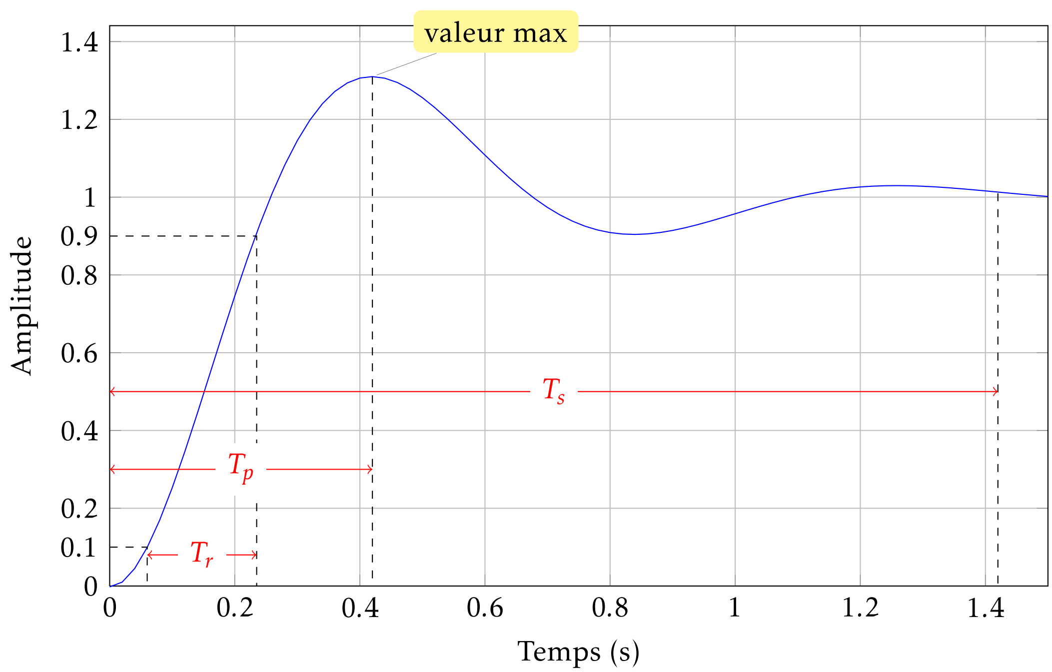


Figure 3.9 – Réponse d'une fonction sous-amortie

Les paramètres T_p, T_r et T_s donnent une indication de la vitesse de la réponse. On démontre plus bas comment calculer ces paramètres :

Temps de pointe, T_p

On trouve T_p en prenant la dérivée de $c(t)$ et en trouvant le premier zéro. On obtient :

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.25}$$

Dépassement, M_p

Le pourcentage de dépassement est définit comme :

$$M_p = \frac{c_{max} - c_{final}}{c_{final}} \times 100 \tag{3.26}$$

Le dépassement maximal (c_{max}) est

$$c_{max} = c(T_p) = 1 + e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \tag{3.27}$$

Donc,

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100\% \tag{3.28}$$

Cette équation permet de trouver ζ si on connaît le dépassement maximal :

$$\zeta = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \tag{3.29}$$

Temps de stabilisation, T_s

Le temps de stabilisation, par définition, est le temps requis pour que l'exponentiel ait diminué jusqu'à 0.02% de sa valeur initiale. Ce qui veut dire :

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02 \tag{3.30}$$

ce qui donne,

$$T_s = \frac{-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n} \tag{3.31}$$

Le terme $-\ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})$ varie de 3.91 à 4.74 (pour $0 < \zeta < 1$). On peut réduire cette équation à :

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \tag{3.32}$$

Temps de montée, T_r

Il n'y a pas de solution analytique pour trouver le temps de montée T_r. Par contre, la figure 4.16 p.181 donne une relation entre $T_r \cdot \omega_n$ et ζ. Il existe aussi une relation empirique pour trouver le temps de montée :

$$\omega_n T_r = 1.73\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1, \quad 0 < \zeta < 0.9 \tag{3.33}$$

ou, connaissant ω_n et T_r,

$$\zeta = 0.115(\omega_n T_r)^3 - 0.883(\omega_n T_r)^2 + 2.504(\omega_n T_r) - 1.738 \tag{3.34}$$

EXEMPLE 4

Soit la fonction suivante :

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 15s + 100}$$

Trouver T_p, M_p, T_r et T_s.

On a :

$$\omega_n = \sqrt{100} = 10$$
$$\zeta = \frac{15}{2 \cdot 10} = 0.75$$

Donc,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.475\text{s}$$
$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 2.838\%$$
$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0.533\text{s}$$

Selon la figure 4.16,

$$\omega_n \cdot T_r = 2.3 \Rightarrow T_r = 0.23\text{s}$$

3.5.1 Diagrammes des pôles

On peut se servir du diagramme des pôles et zéros pour obtenir de l'information sur le système. La figure 3.10 montre les pôles d'une fonction de deuxième ordre.

On définit deux nouveaux termes,

$$\sigma_d = \zeta\omega_n \tag{3.35}$$
$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{3.36}$$

ce qui veut dire que les pôles sont :

$$s_{1,2} = -\sigma_d \pm j\omega_d \tag{3.37}$$

Selon la figure, $\cos\theta = \zeta$. Si on change l'équation de T_p,

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} \tag{3.38}$$

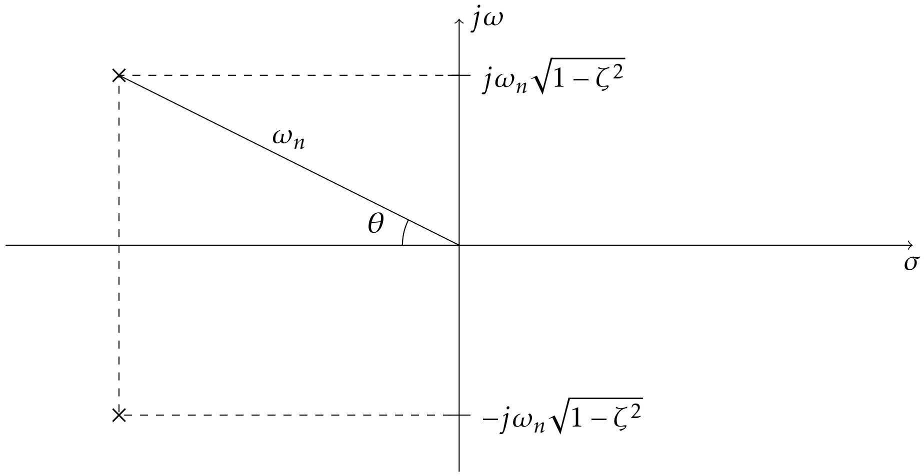


FIGURE 3.10 – Diagramme de pôles et zéros d'un système de deuxième ordre

$\Rightarrow T_p$ est inversement proportionnel à la partie imaginaire du pôle.

Si on change l'équation de T_s,

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d} \tag{3.39}$$

$\Rightarrow T_s$ est inversement proportionnel à la partie réelle du pôle.

On voit aussi, selon l'équation 3.28, que M_p dépend seulement de ζ.

On peut montrer ces relations dans un diagramme de pôles et zéros (figure 3.11).

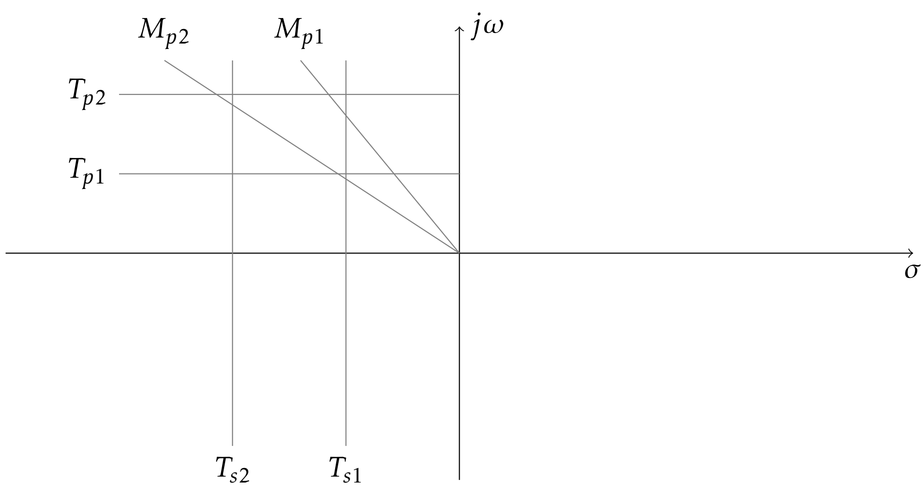


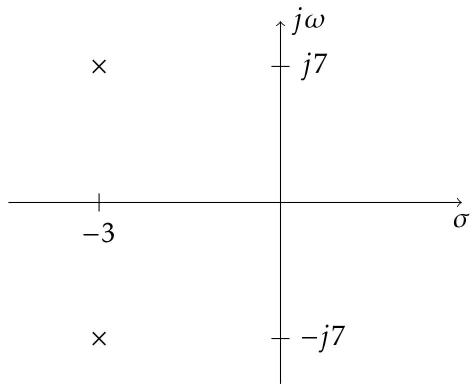
FIGURE 3.11 – Diagramme de pôles et zéros

Si on résume la figure :

- Si on se déplace en vertical, on conserve la même enveloppe : T_s est constant.
- Si on se déplace de façon horizontale, la fréquence ne change pas : T_p est constant.
- Si on se déplace en ligne droite, avec ζ constant, et M_p est constant.

Exemple 5

Soit le diagramme des pôles suivant :



Trouver ζ, ω_n, T_p, M_p et T_s.

D'après la figure,

$$\zeta = \cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{7}{3}\right)\right) = 0.394$$

$$\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.616$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{7} = 0.449\text{s}$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = 26.018\%$$

$$T_s \approx \frac{4}{\sigma_d} = \frac{4}{3} = 1.333\text{s}$$

3.5.2 Détermination pratique des paramètres

On peut faire de façon semblable au systèmes de premier ordre pour déterminer expérimentalement les paramètres d'un système. Il suffit de mesurer M_p, T_r, T_p. Les autres paramètres peuvent alors être déduits de ces mesures.

3.6 Systèmes avec pôles additionnels

Les équations précédentes ne sont valides que pour un système de deuxième ordre sans zéros. S'il y a un zéro, ou que l'ordre est supérieur à 2, on ne peut pas appliquer les équations de T_s, T_p, etc.

Par contre, sous certaines conditions, on peut approximer ces systèmes par des systèmes de deuxième ordre.

→ On peut approximer par un système de deuxième ordre si les pôles d'ordre supérieurs sont plus grands que ceux de deuxième ordre :

$$p_{3,4,\ldots} > 5p_{1,2} \tag{3.40}$$

Si les pôles supérieurs sont plus grands que 5 fois les pôles plus faibles, leur contribution à la réponse du système est négligeable.

3.6.1 Systèmes avec zéros

De la même façon, si un système a un zéro, l'effet de ce zéro est négligeable s'il est très grand. Si le zéro est positif, le type de réponse change, et la fonction commence par un négatif (exemple à la figure 3.12).

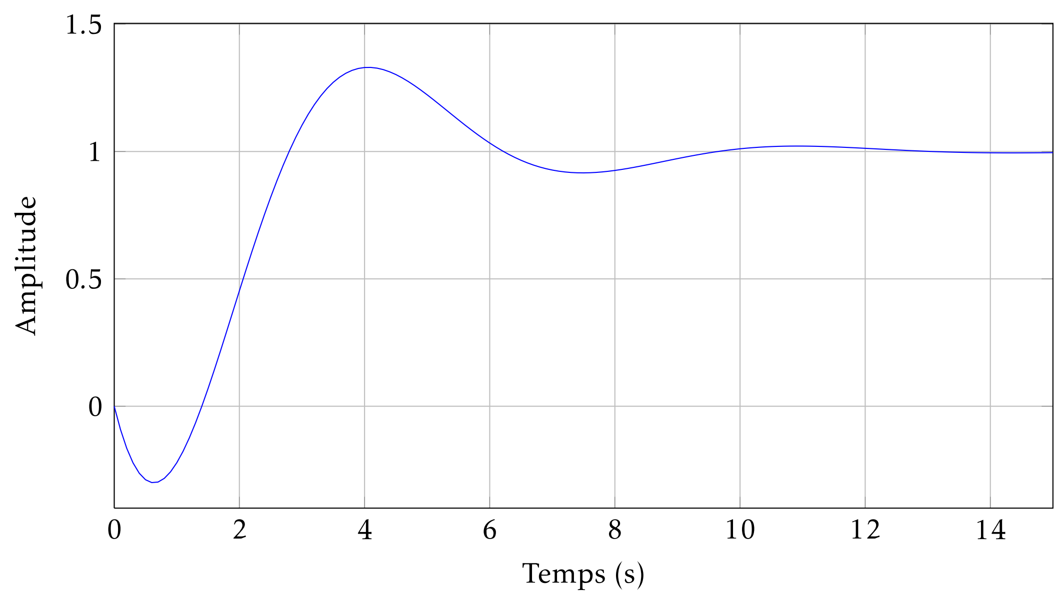


Figure 3.12 – Réponse d'une fonction avec zéro positif

Ce type de réponse est habituellement indésirable : par exemple, si ce type de système modéliserait la direction d'un avion, ça voudrait dire qu'un avion tournerait initialement vers la gauche lorsqu'on tourne vers la droite !