Chapitre 4

Réduction de systèmes multiples

Jusqu'à présent on a travaillé avec des systèmes simples composés d'un seul bloc (une fonction de transfert). Mais les systèmes réels sont bien plus complexes : ils sont composés de plusieurs sous-systèmes, branchés ensemble de différentes façons.

On va donc essayer de réduire ces systèmes complexes à une seule fonction de transfert.

On peut représenter des systèmes en utilisant l'une de deux méthodes : les schémas blocs, ou les diagrammes de fluence. Habituellement, on se sert des schémas blocs pour l'analyse dans le domaine fréquentiel, et les diagrammes de fluence pour l'analyse par équations d'état.

4.1 Schémas blocs

Pour la réduction des systèmes, on a les règles suivantes :

Règle 1 : Série

Pour des blocs en série, le bloc total est la multiplication des blocs, comme montré à la figure 4.1.

Note : Cette règle est vraie à condition que la connexion d'un système à un autre n'affecte pas la sortie. En d'autre mots, cette réduction est possible si la sortie d'un système est la même qu'il y ait un autre sous-système après ou pas.

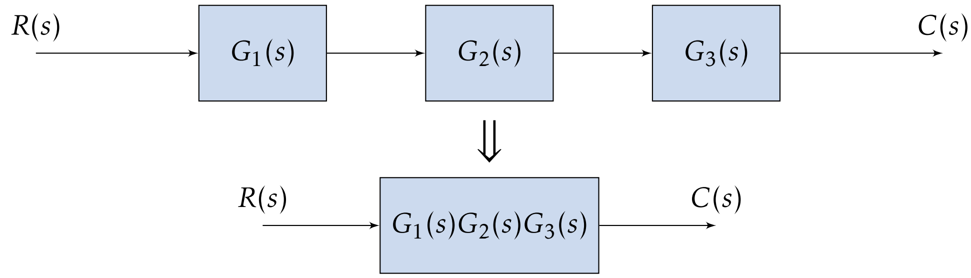


FIGURE 4.1 – Schémas bloc en série

Règle 2 : Parallèle

Pour des blocs en parallèle, on fait la somme (ou la soustraction) des blocs, comme montré à la figure 4.2.

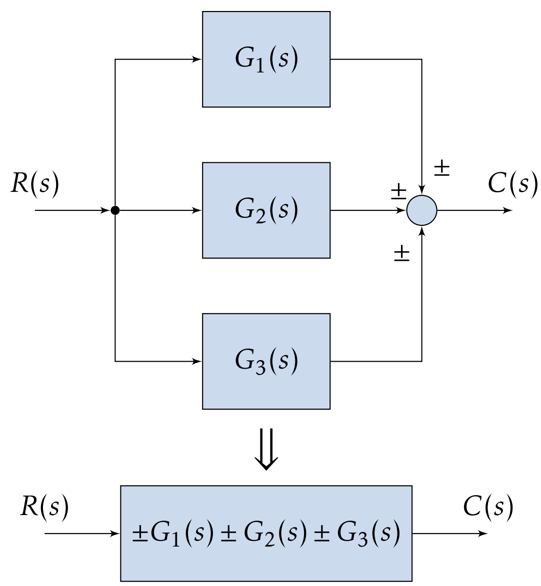


FIGURE 4.2 – Schémas bloc en parallèle

Règle 3 : Contre-réaction (feedback)

Une boucle de feedback est montrée à la figure 4.3. La fonction de transfert équivalente est :

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{4.1}$$

NOTE : C'est une règle importante : elle est utilisée souvent. La démonstration est comme suit :

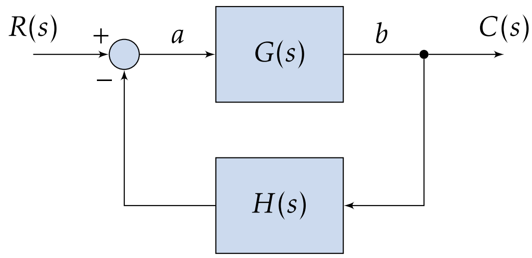


Figure 4.3 – Boucle de feedback

Au point a,

$$A(s) = R(s) - C(s)H(s) \tag{4.2}$$

Au point b,

$$\begin{aligned} C(s) &= A(s)G(s) && (4.3) \\ &= G(s)[R(s) - C(s)H(s)] && (4.4) \\ &= G(s)R(s) - G(s)C(s)H(s) && (4.5) \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{4.6}$$

Autre simplifications

D'autres types de simplifications sont montrées aux figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7.

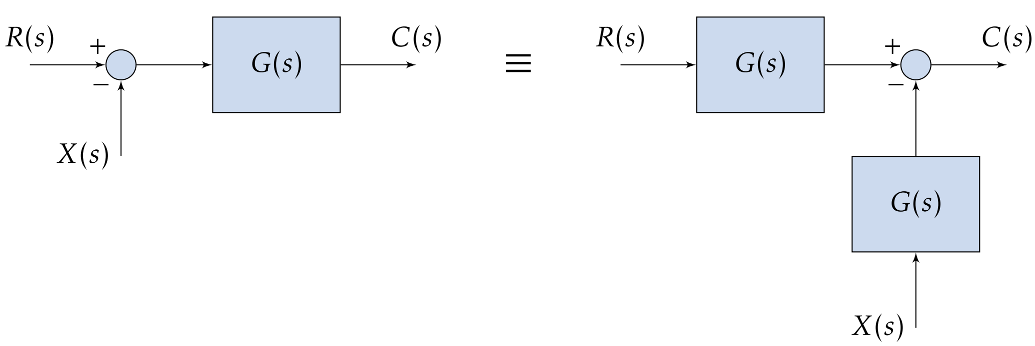


Figure 4.4 – Schémas bloc, simplification 1

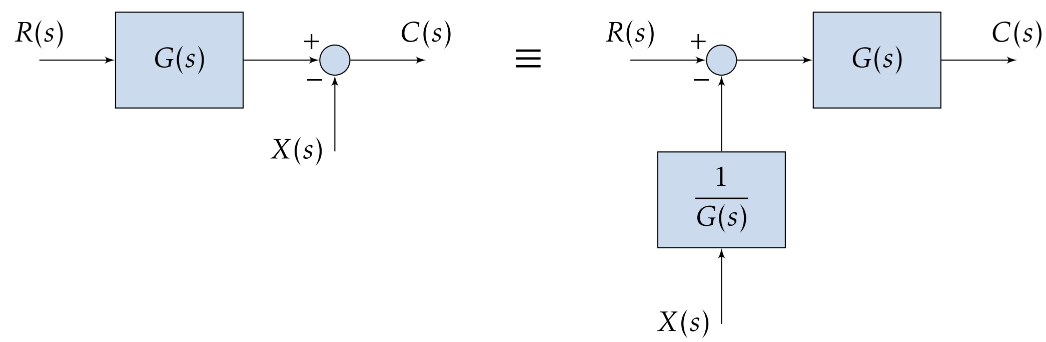


Figure 4.5 – Schémas bloc, simplification 2

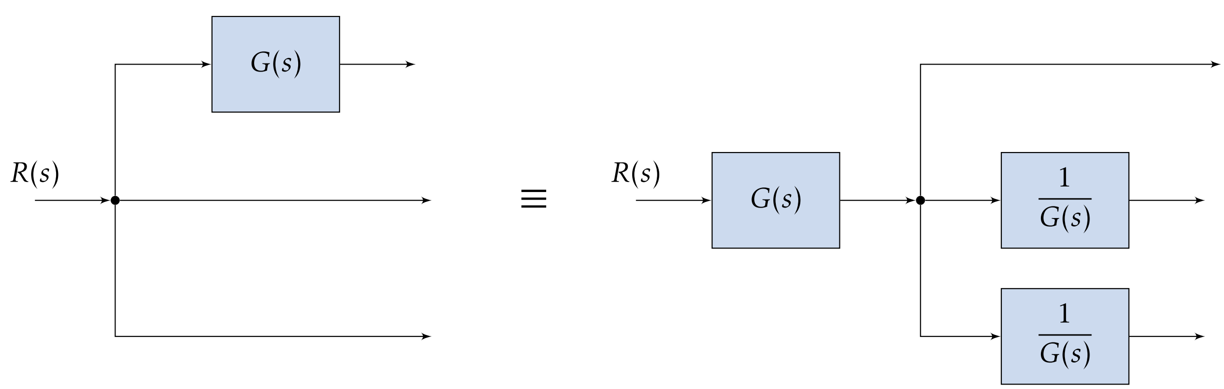


Figure 4.6 – Schémas bloc, simplification 3

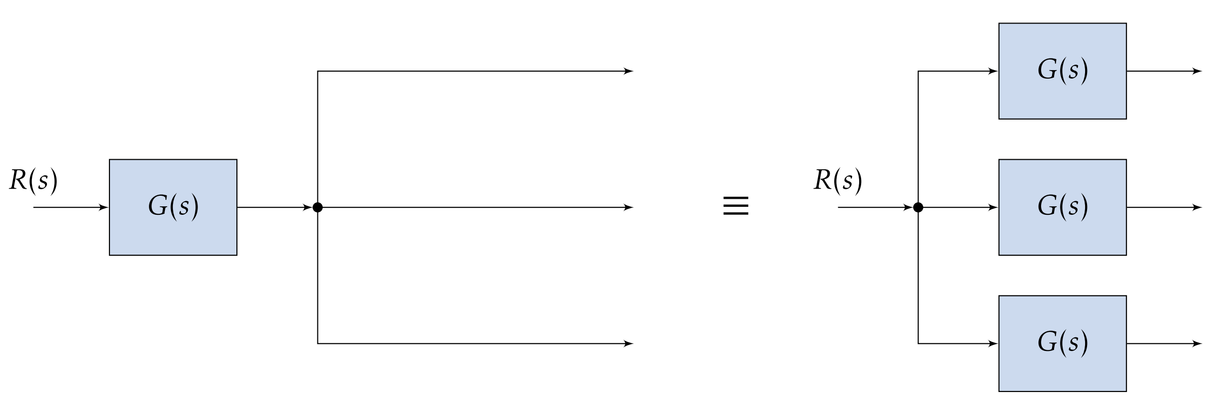
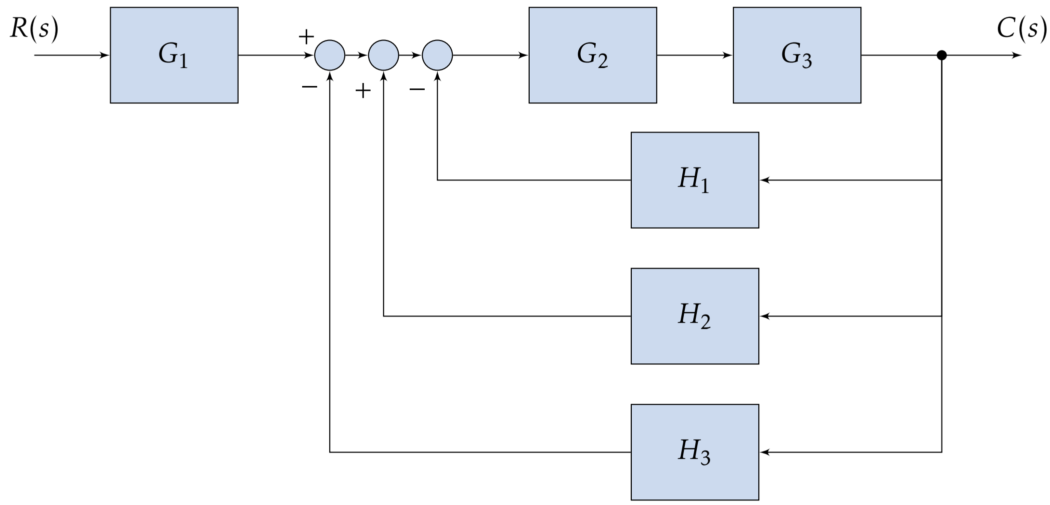


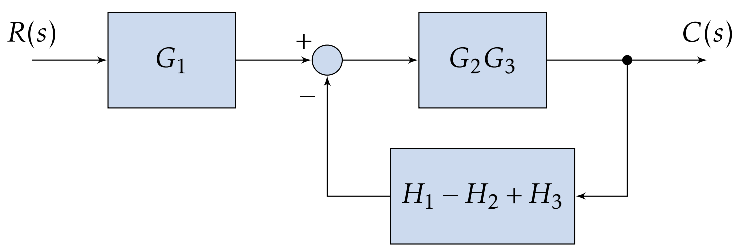
Figure 4.7 – Schémas bloc, simplification 4

Exemple 1

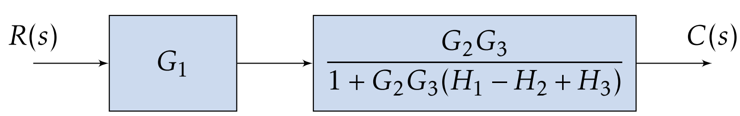
Simplifier le diagramme suivant.



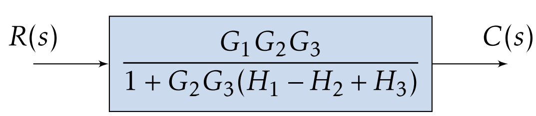
Première étape :



Deuxième étape :



Troisième étape :



4.2 Analyse et design de systèmes avec feedback

Soit le système avec feedback unitaire de la figure 4.8.

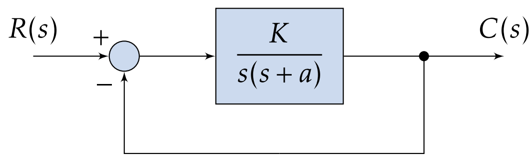


FIGURE 4.8 – Système avec feedback

Ce système peut être simplifié par :

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+a)}}{1 + \frac{K}{s(s+a)}} = \frac{K}{s^2 + as + K} \tag{4.7}$$

où K est le gain de l'amplificateur. Les pôles sont :

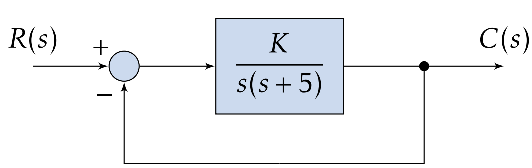
$$s_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4K}}{2} \tag{4.8}$$

Selon la valeur de K, le système est sur-amorti, sous-amorti ou en amortissement critique.

- $0 < K < \frac{a^2}{4}$: sur-amorti.
- $K = \frac{a^2}{4}$: amortissement critique.
- $K > \frac{a^2}{4}$: sous-amorti.

EXEMPLE 2

Soit le système suivant :



Ajuster le gain K pour que le système ait un dépassement maximal de 10%.

La fonction de transfert en boucle fermée est

$$T(s) = \frac{K}{s^2 + 5s + K}$$

Selon les équations des systèmes de deuxième ordre,

$$\omega_n = \sqrt{K}$$

et

$$2\zeta\omega_n = 5$$

ou,

$$\zeta = \frac{5}{2\sqrt{K}}$$

Le dépassement maximal est fonction de l'amortissement seulement. Selon l'équation précédente, l'amortissement n'est fonction que du gain K. Un amortissement de 10% implique que ζ est 0.591. On trouve donc une valeur de K de

$$K = 17.892$$

Si on aurait choisit le temps de stabilisation comme critère de design, on aurait été incapable de satisfaire aux exigences. Le temps de stabilisation est fonction de la partie réelle des pôles, et dans ce cas, K n'affecte pas la partie réelle.

4.3 Diagrammes de fluence

Les diagrammes de fluence sont une alternative aux schémas blocs. Ils sont constitués de branches et noeuds.

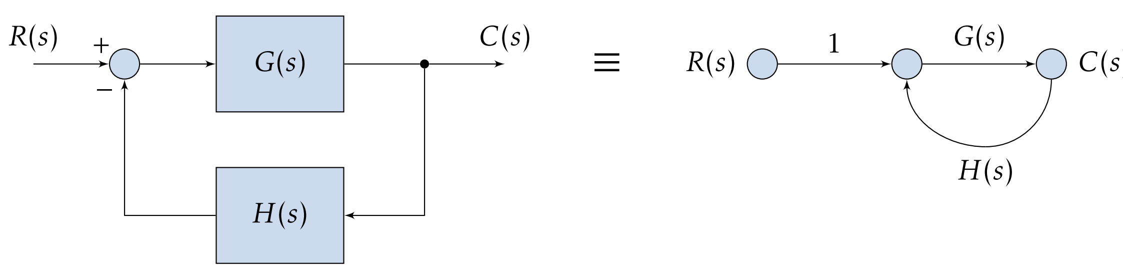


Figure 4.9 – Équivalence schéma bloc - diagramme de fluence

4.4 Règle de Mason

Pour réduire les diagrammes de fluence, on se sert de la Règle de Mason. Avant de procéder à l'explication de la Règle de Mason, il faut premièrement énumérer quelques définitions.

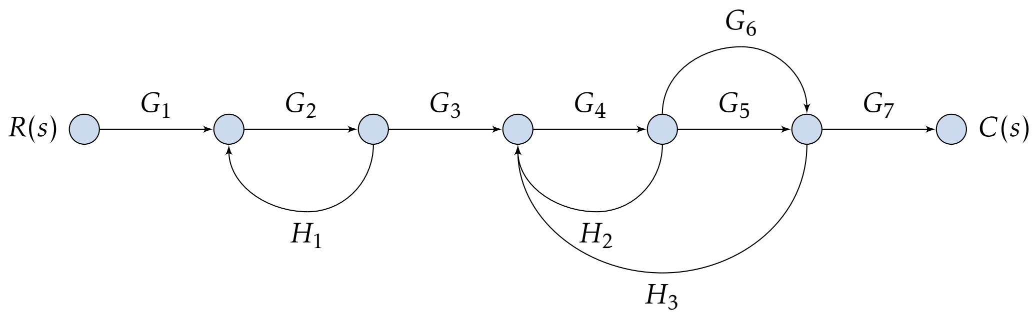


Figure 4.10 – Exemple, diagramme de fluence

Gain de boucle : Le produit des gains dans un parcours qui débute et finit au même noeud.

Dans le circuit de la figure 4.10, on a 4 boucles. Les gains des 4 boucles sont :

1. G_2H_1
2. G_4H_2
3. $G_4G_5H_3$
4. $G_4G_6H_3$

Gain en parcours direct : Le produit des gains d'un parcours allant du noeud du début au noeud de fin (sans revenir en arrière).

Dans l'exemple précédent, les gains en parcours direct sont :

1. $G_1G_2G_3G_4G_5G_7$
2. $G_1G_2G_3G_4G_6G_7$

Boucles sans contact : Des boucles qui n'ont aucun noeud en commun.

Dans le circuit de la figure 4.10, la boucle G_2H_1 n'a aucun noeud en commun avec les autres boucles.

Gain des boucles sans contact : Le produit des gains des boucles qui ne se touchent pas pris 2, 3, 4, etc à la fois.

Dans l'exemple précédent, les gains prit deux à la fois sont :

1. $[G_2H_1] \cdot [G_4H_2]$
2. $[G_2H_1] \cdot [G_4G_5H_3]$
3. $[G_2H_1] \cdot [G_4G_6H_3]$

Il n'y pas trois boucles indépendantes dans l'exemple.

Règle de Mason

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\sum_k T_k \Delta_k}{\Delta} \tag{4.9}$$

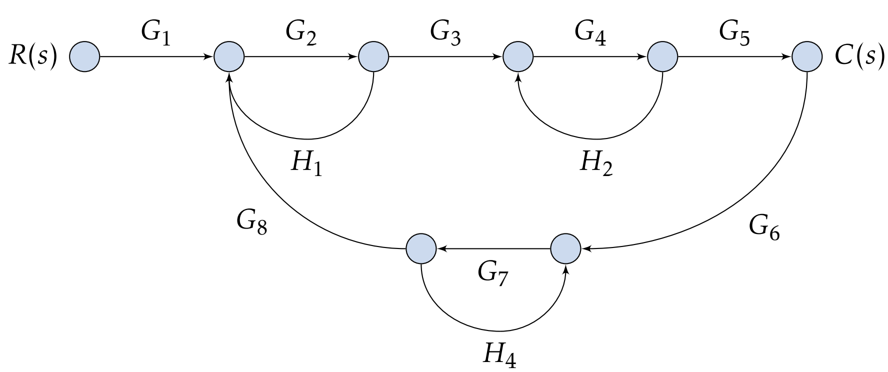
où

- k = nombre de parcours direct
- T_k = gain du k^e parcours direct
- Δ = 1 - $\sum$ gains de boucle + $\sum$ gains sans contact pris 2 à la fois - $\sum$ gains pris 3 à la fois + $\sum$ gains pris 4 à la fois …
- Δ_k = Δ - $\sum$ gains de boucles de Δ qui touchent au k^e parcours direct

On illustre à l'aide d'un exemple.

EXEMPLE 3

Soit le diagramme de fluence suivant :



Trouver la fonction de transfert $\dfrac{C(s)}{R(s)}$

---

1. Déterminer les gains en parcours direct : il y a un seul parcours direct.

$$G_1 G_2 G_3 G_4 G_5$$

2. Gains des boucles :

1. $G_2 H_1$
2. $G_4 H_2$
3. $G_7 H_4$
4. $G_2 G_3 G_4 G_5 G_6 G_7 G_8$

3. Boucles sans contact :
- La boucle 1 ne touche pas la boucle 2
- La boucle 1 ne touche pas la boucle 3
- La boucle 2 ne touche pas la boucle 3

Donc, si on prend les gains de boucle 2 à la fois :
- 1 et 2 : $G_2H_1G_4H_2$
- 1 et 3 : $G_2H_1G_7H_4$
- 2 et 3 : $G_4H_2G_7H_4$

et 3 à la fois :
- 1 et 2 et 3 : $G_2H_1G_2H_4G_7H_4$

4. Calcul de Δ

$$\begin{aligned}\Delta = 1 &- [G_2H_1 + G_4H_2 + G_7H_4 + G_2G_3G_4G_5G_6G_7G_8]\\ &+ [G_2H_1G_4H_2 + G_2H_1G_7H_4 + G_4H_2G_7H_4]\\ &- [G_2H_1G_2H_4G_7H_4]\end{aligned}$$

$\Delta_k = \Delta_1 = 1 - G_7H_4$

On retrouve donc la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{[G_1G_2G_3G_4G_5]\cdot[1 - G_7H_4]}{\Delta}$$