Chapitre 5

Stabilité

Jusqu'à présent, on a discuté de représentation de systèmes et de réponse transitoire. La prochaine étape est la stabilité.

La stabilité est le critère le plus important dans le design des systèmes de contrôle. Si un système n'est pas stable, les autres paramètres n'ont aucune signification. On doit donc porter une attention particulière à la stabilité. Un système instable ne peut pas être conçu pour donner une réponse transitoire et erreur statique spécifique.

Il existe plusieurs définitions de la stabilité d'un système, selon le type de système considéré et même le point de vue considéré.

Dans le cadre du cours, on se limite aux systèmes linéaires invariants. Dans ce cas, la réponse du système est :

$$c(t) = c_f(t) + c_n(t) \tag{5.1}$$

où $c_f(t)$ est la réponse forcée, et $c_n(t)$ est la réponse naturelle.

On définit donc la stabilité, l'instabilité, et la stabilité critique de la façon suivante :

- Un système linéaire invariant dans le temps est *stable* si sa réponse naturelle approche zéro lorsque $t \to \infty$.
$$\lim_{t\to\infty} c_n(t) = 0 \tag{5.2}$$
- Un système linéaire invariant dans le temps est *instable* si sa réponse naturelle évolue sans limites pour $t \to \infty$.
$$\lim_{t\to\infty} c_n(t) = \infty \tag{5.3}$$
- Un système linéaire invariant dans le temps est marginalement (critiquement) stable si sa réponse naturelle ne décroit ni ne croit en fonction du temps (demeure constant).
$$\lim_{t\to\infty} c_n(t) = cst \tag{5.4}$$

Physiquement, un système instable dont la réponse naturelle croit sans limites peut causer des dommages au système lui-même, à des systèmes adjacents, ou causer des blessures à des personnes.

$\Rightarrow$ Il faut toujours vérifier la stabilité d'un système.

5.1 Détermination de la stabilité

Diverses méthodes peuvent être utilisées pour déterminer la stabilité des systèmes :

1. Calcul des pôles de la fonction de transfert
2. Critère de Routh-Hurwitz
3. Critère de Nyquist
4. Diagramme de Bode
5. Lieu des racines en fonction des paramètres du système

Dans ce chapitre, on se limite aux deux premières méthodes. On verra les méthodes 3 et 4 dans d'autre chapitres.

5.2 Calcul des pôles de la fonction de transfert

Si les pôles de la fonction de transfert du système ont une partie réelle positive, le système est instable. Un seul pôle suffit pour rendre le système instable. Si des pôles ont une partie réelle égale à zéro, le système est marginalement stable.

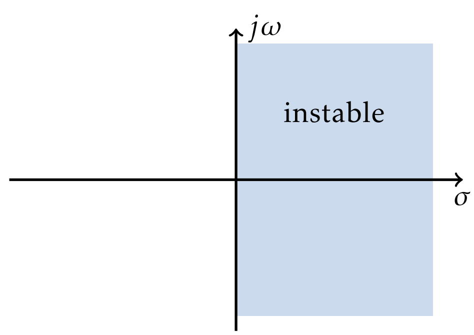


FIGURE 5.1 – Stabilité d'un système selon les pôles.

Dans certains cas, il peut être difficile de calculer les racines sans logiciel. On utilise alors la prochaine méthode, le Critère de Routh-Hurwitz.

5.3 Critère de Routh-Hurwitz

La méthode de Routh-Hurwitz permet de porter une conclusion sur la stabilité d'un système ; cependant, elle ne permet pas de calculer la localisation exacte des racines au dénominateur. En effet, cette méthode nous permet de dire s'il y a des pôles dans la partie droite, gauche, ou sur l'axe imaginaire du plan s. Il faut spécifier qu'on va connaître combien de pôles sont dans tel secteur, mais non où ils sont placés.

Il y a deux étapes à la méthode :

1. Générer la table de Routh
2. Interpréter la table

5.4 Génération de la table de Routh

Soit une fonction de transfert quelconque :

$$F(s) = \frac{N(s)}{a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \tag{5.5}$$

On procède de la façon suivante :

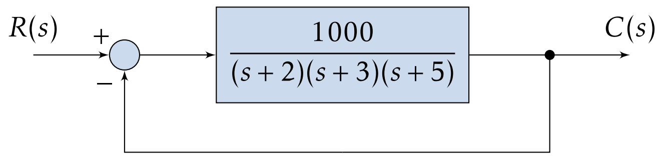
s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$A = \dfrac{a_3a_2 - a_4a_1}{a_3}$	$B = \dfrac{a_3a_0 - a_40}{a_3}$	$\dfrac{a_30 - a_40}{a_3} = 0$
s^1	$C = \dfrac{Aa_1 - Ba_3}{A}$	$\dfrac{A0 - a_30}{A} = 0$	0
s^0	$D = \dfrac{CB - A0}{C}$	0	0

Interprétation [Critère de Routh-Hurwitz] : Les racines de l'équation caractéristique sont tous dans la partie gauche du plan s (système stable) si tous les éléments de la première colonne de la table de Routh ont le même signe.

Le nombre de changements de signe est égal au nombre de racines situées dans la partie droite du plan s.

EXEMPLE 1

Soit le système suivant :



Créer la table de Routh.

Premièrement, il faut réduire le système.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{1000}{s^3+10s^2+31s+1030}$$

On crée la table de Routh.

$$\begin{array}{llll}
s^3 & 1 & 31 & 0 \\
s^2 & \cancel{10}\ 1 & \cancel{1030}\ 103 & 0 \\
s^1 & \frac{-103+31}{1} = -72 & 0 & 0 \\
s^0 & \frac{(-72)(103)-0}{-72} = 103 & 0 & 0
\end{array}
\quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{On peut diviser par 10} \\ \quad\ \text{pour simplifier} \end{array}$$

NOTE : On a deux changements de signe dans la première colonne, donc deux racines réelles positives $\Rightarrow$ instable.

5.5 Cas particuliers

Il y a quelques cas particuliers à étudier.

1. Zéro dans la première colonne.

Dans ce cas, on remplace le zéro par une variable ϵ, et on prend la limite lorsque ϵ tend vers 0^+ (ou 0^-).

Exemple 2

Soit le système suivant :

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

Calculer la table de Routh.

La table de Routh est :

$$\begin{array}{cccc}
s^5 & 1 & 3 & 5 \\
s^4 & 2 & 6 & 3 \\
s^3 & \cancel{0}\ \epsilon & 3.5 & 0 \\
s^2 & \frac{6\epsilon-7}{\epsilon} & 3 & 0 \\
s^1 & \frac{42\epsilon-49-6\epsilon^2}{12\epsilon-14} & 0 & 0 \\
s^0 & 3 & 0 & 0
\end{array}$$

On prend la limite :

$$\begin{aligned}
s^2 &: \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{6\epsilon - 7}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} 6 - \frac{7}{\epsilon} = -\infty < 0 \\
s^1 &: \epsilon \to 0^+ : \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14} = \frac{49}{14} > 0
\end{aligned}$$

Il y a deux changements de signe (de s^3 à s^2 et de s^2 à s^1). Le système est donc instable.

On aurait obtenu le même résultat si on aurait prit $\epsilon \to 0^-$.

Il aurait aussi été possible de solutionner ce problème en utilisant le polynôme réciproque du dénominateur.

Soit un polynôme $p(s)$:

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \tag{5.6}$$

Le polynôme réciproque est :

$$r(s) = 1 + a_{n-1}s + a_{n-2}s^2 + \cdots + a_1 s^{n-1} + a_0 s^n \tag{5.7}$$

Exemple 3

Calculer le réciproque de $s^4+6s^3-8s^2+s+5$.

$$r(s)=5s^4+s^3-8s^2+6s+1$$

Exemple 4

Soit la fonction de transfert suivante :

$$T(s)=\frac{10}{s^5+2s^4+3s^3+6s^2+5s+3}$$

Déterminer la stabilité.

On sait déjà qu'on va obtenir un 0 dans la première colonne. On prend donc le polynôme réciproque :

$$r(s)=3s^5+5s^4+6s^3+3s^2+2s+1$$

On crée la table de Routh :

$$\begin{array}{cccc}
s^5 & 3 & 6 & 2 \\
s^4 & 5 & 3 & 1 \\
s^3 & \frac{(5)(6)-(3)(3)}{5}=4.2 & \frac{(5)(2)-(3)(1)}{5}=1.4 & 0 \\
s^2 & \frac{(4.2)(3)-(1.4)(5)}{4.2}=1.33 & 1 & 0 \\
s^1 & \frac{(1.33)(1.4)-4.2}{1.33}=-1.75 & 0 & 0 \\
s^0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Il y a deux changements de signe dans la première colonne, donc le système est instable.

---

2. Une rangée entière de zéros.

Dans ce cas, on va à la rangée précédente et on crée un polynôme $A(s)$ formé des coefficients de cette rangée. On dérive alors $A(s)$ pour obtenir les coefficients de la nouvelle rangée.

Exemple 5

Soit la fonction de transfert suivante :

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$$

Déterminer la stabilité.

On commence la table de Routh.

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & \cancel{7}\,1 & \cancel{42}\,6 & \cancel{56}\,8 \\ s^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La troisième rangée est composée de zéros. On construit alors le polynôme :

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

et on dérive :

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

La table de Routh est alors modifiée :

$$\begin{array}{cccc} s^5 & 1 & 6 & 8 \\ s^4 & \cancel{7}\,1 & \cancel{42}\,6 & \cancel{56}\,8 \\ s^3 & \cancel{4}\,1 & \cancel{12}\,3 & 0 \\ s^2 & 3 & 8 & 0 \\ s^1 & 0.333 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & 0 & 0 \end{array}$$

Il n'y a aucun changement de signe : le système est stable.

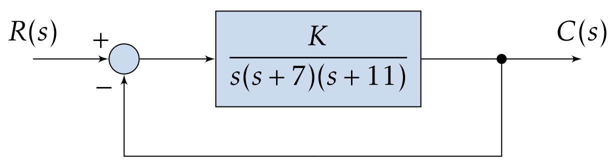
On obtient une rangée de zéros si on a un polynôme ayant des coefficients seulement paires ou seulement impaires. Ceci peut être causé par :

- Paires de racines réelles de même amplitude mais de signe opposé.
- Paires de racines imaginaires.
- Paires de racines complexes conjuguées formant une symétrie par rapport à l'origine du plan s.

5.6 Design à l'aide du critère de Routh-Hurwitz

Exemple 6

Soit le système suivant :



Trouver les valeurs de K pour rendre le système stable, instable, et marginalement stable. ($K > 0$).

Il faut premièrement trouver la fonction de transfert en boucle fermée :

$$T(s) = \frac{\frac{K}{s(s+7)(s+11)}}{1 + \frac{K}{s(s+7)(s+11)}} = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

La prochaine étape est de construire la table de Routh.

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 77 \\ s^2 & 18 & K \\ s^1 & \dfrac{1386 - K}{18} & 0 \\ s^0 & K & 0 \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il ne doit pas y avoir de changement de signe dans la première colonne.

$$\frac{1386 - K}{18} > 0 \Rightarrow K < 1386$$

Pour que le système soit instable,

$$\frac{1386 - K}{18} < 0 \Rightarrow K > 1386$$

Si $K = 1386$, on a une rangée de zéros. Pour compléter la table,

$$\frac{d(18s^2 + K)}{ds} = 36s$$

$$\begin{array}{ccc} s^1 & 36 & 0 \\ s^0 & K = 1386 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow$ Le système est marginalement stable.