

CHAPITRE 6

Erreur statique

On considère ici le troisième paramètre de design, soit l'erreur statique. L'erreur statique est la différence entre l'entrée et la sortie d'un système lorsque $t \rightarrow \infty$ pour une entrée de contrôle.

On utilise une entrée connue, comme un échelon, une rampe, ou une parabole pour caractériser la réponse du système et son erreur statique.

Le calcul de l'erreur statique n'est valide que si le système est stable. Il faut donc s'assurer de stabiliser le système étudié avant toute considération de l'erreur statique.

6.1 Définition

Soit un système de contrôle de la forme suivante (figure 6.1) :

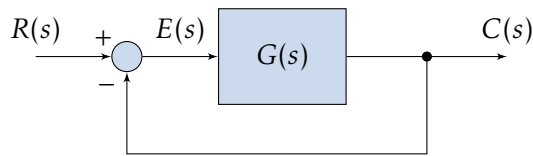


FIGURE 6.1 – Système avec feedback

Par définition, l'erreur statique e_{ss} est

$$e_{ss} = r(t) - c(t) = R(s) - C(s) \quad (6.1)$$

NOTE : L'erreur statique est définie pour un système à boucle de retour unitaire.

Selon le système de la figure 6.1,

$$E(s) = R(s) - C(s) = R(s) - E(s)G(s) \quad (6.2)$$

$$= \frac{R(s)}{1 + G(s)} \quad (6.3)$$

L'erreur statique est alors

$$e_{ss} = r(\infty) - c(\infty) = e(\infty) \quad (6.4)$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (6.5)$$

$$= \left. \frac{sR(s)}{1 + G(s)} \right|_{s=0} \quad (6.6)$$

L'erreur statique dépend de $R(s)$ et $G(s)$. Puisqu'elle dépend de $R(s)$, l'erreur statique est différente selon l'entrée utilisée.

Si le système sous étude a une boucle de retour non unitaire ($H(s) \neq 1$), il faut transformer le système avant de pouvoir appliquer les équations de l'erreur statique.

Soit le système à boucle de retour non-unitaire de la figure 6.2.

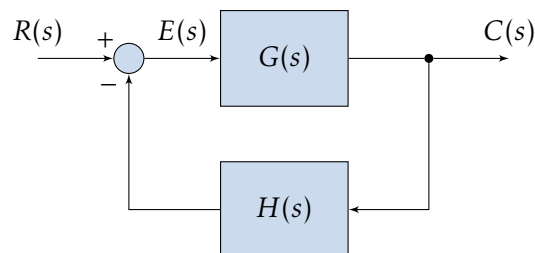


FIGURE 6.2 – Système avec boucle de retour non unitaire

En utilisant l'algèbre des blocs, on obtient le système à boucle de retour unitaire de la figure 6.3.

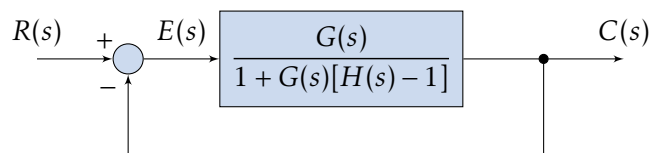


FIGURE 6.3 – Système modifié avec boucle de retour unitaire

On définit alors

$$G_o(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)[H(s) - 1]} \quad (6.7)$$

la fonction de transfert en boucle ouverte avec retour unitaire.

L'erreur statique devient donc,

$$e_{ss} = \left. \frac{sR(s)}{1 + G_o(s)} \right|_{s=0} \quad (6.8)$$

NOTE : Si $H(s) = 1$, on retrouve l'équation 6.6.

6.2 Types de systèmes

Puisque l'erreur statique dépend du type de signal à l'entrée, on classe les systèmes selon l'ordre des pôles à $s = 0$. La fonction de transfert en boucle ouverte $G_o(s)$ peut être représentée de la forme :

$$G_o(s) = \frac{K(s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots + a_1s + a_0)}{s^q(s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0)} \quad (6.9)$$

où K est une constante et m et n sont des entiers. L'exponentiel q est un entier, et représente le type du système. Par exemple, si $q = 0$, le système est de type 0 ; si $q = 2$, le système est de type 2.

EXEMPLE 1

Donner le type des systèmes suivants.

$$G_o(s) = \frac{K(1 + 0.5s)}{s(s + 1)(1 + 2s)} \rightarrow \text{Type 1}$$

$$G_o(s) = \frac{K}{s^3} \rightarrow \text{Type 3}$$

$$G_o(s) = \frac{K}{(s + 1)(1 + 2s)} \rightarrow \text{Type 0}$$

6.3 Évaluation de l'erreur statique

On a mentionné auparavant trois entrées de contrôle possibles pour l'évaluation de l'erreur statique. On verra ici les effets de chacune de ces entrées sur l'erreur statique de systèmes de différents types.

6.3.1 Entrée échelon

Pour une entrée échelon,

$$R(s) = \frac{k_r}{s} \quad (6.10)$$

où k_r est une constante ($k_r = 1$ pour une entrée échelon unitaire).

L'erreur statique est donc :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_o(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_r}{1 + G_o(s)} \quad (6.11)$$

$$= \frac{k_r}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s)} \quad (6.12)$$

Pour simplifier, on définit une constante K_p :

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) \quad (6.13)$$

On appelle K_p la constante d'erreur à un échelon ou la constante d'erreur de position. L'erreur statique est donc :

$$e_{ss} = \frac{k_r}{1 + K_p} \quad (6.14)$$

Pour un système de type 0,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = K_p \quad (6.15)$$

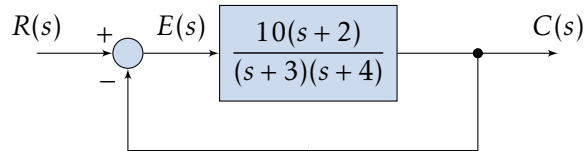
une valeur finie. Par contre, pour les systèmes de type 1 et plus,

$$\lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \infty \quad (6.16)$$

et l'erreur statique est nulle.

EXEMPLE 2

Calculer l'erreur statique due à une entrée échelon unitaire pour le système suivant :



Premièrement, on vérifie la stabilité du système.

$$T(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{10(s+2)}{(s+3)(s+4) + 10(s+2)} = \frac{10(s+2)}{s^2 + 17s + 32}$$

On crée alors la table de Routh :

$$\begin{array}{r|rr} s^2 & 1 & 32 \\ s^1 & 17 & 0 \\ s^0 & 32 & 0 \end{array}$$

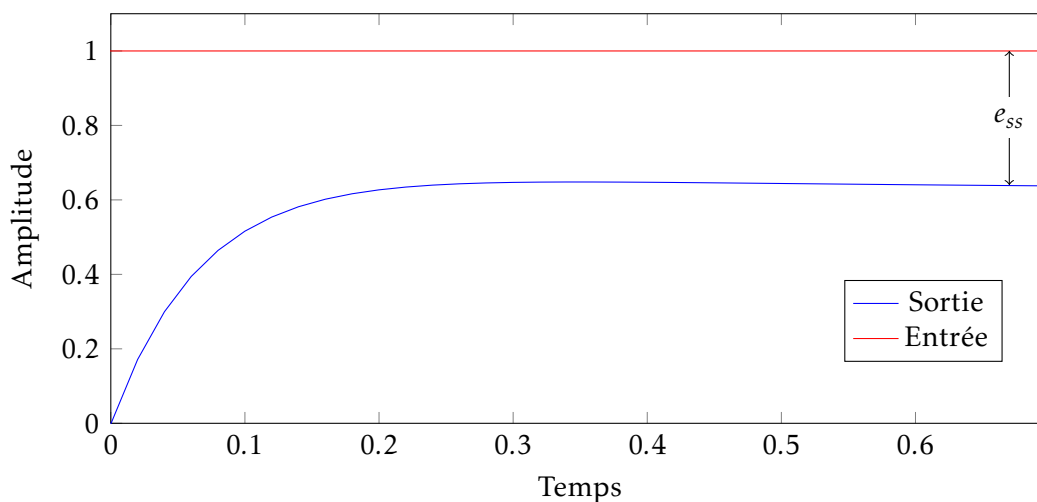
Le système est stable. On sait aussi que le système est de type 0. Alors,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_o(s) = \frac{(10)(2)}{(3)(4)} = 1.667$$

L'erreur statique est ($k_r = 1$)

$$e_{ss} = \frac{k_r}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + 1.667} = 0.375$$

Ceci donnerait la figure suivante :



6.3.2 Entrée rampe

Pour une entrée rampe, $r(t) = k_r t u(t)$, et

$$\mathfrak{L}[r(t)] = \frac{k_r}{s^2} \quad (6.17)$$

L'erreur statique est :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_o(s)} \quad (6.18)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_r}{s + sG_o(s)} \quad (6.19)$$

$$= \frac{k_r}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s)} \quad (6.20)$$

On définit une constante, K_v , la constante de vitesse :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) \quad (6.21)$$

Ce qui donne

$$e_{ss} = \frac{k_r}{K_v} \quad (6.22)$$

Pour un système de type 0,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = 0 \quad (6.23)$$

et donc $e_{ss} = \infty$.

Pour un système de type 1,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = K_v \quad (6.24)$$

une valeur finie, et l'erreur statique est

$$e_{ss} = \frac{k_r}{K_v} \quad (6.25)$$

Pour les systèmes d'ordre supérieur,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \infty \quad (6.26)$$

et l'erreur statique est nulle.

EXEMPLE 3

Soit

$$G_o(s) = \frac{3}{s(s^2 - 3s + 5)}$$

Calculer l'erreur statique due à une entrée rampe.

On calcule la stabilité du système :

$$T(s) = \frac{3}{s(s^2 - 3s + 5) + 3} = \frac{3}{s^3 - 3s^2 + 5s + 3}$$

Table de Routh :

s^3	1	5
s^2	-3	3
s^1	6	0
s^0	3	0

Il y a deux changements de signe dans la première colonne : le système est instable. Tout calcul de l'erreur statique est erroné.

6.3.3 Entrée parabolique

Pour une entrée parabolique, $r(t) = k_r \frac{t^2}{2} u(t)$, et

$$R(s) = \frac{k_r}{s^3} \tag{6.27}$$

L'erreur statique dans ce cas est :

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{R(s)}{1 + G_o(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k_r}{s^3(1 + G_o(s))} \tag{6.28}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_r}{s^2 + s^2 G_o(s)} \tag{6.29}$$

$$= \frac{k_r}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s)} \tag{6.30}$$

De même, on définit une constante K_a , la constante d'accélération,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) \tag{6.31}$$

et donc l'erreur statique est :

$$e_{ss} = \frac{k_r}{K_a} \quad (6.32)$$

Pour des systèmes dont l'ordre est plus petit que 2,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = 0 \quad (6.33)$$

et l'erreur statique est infinie. Pour un système d'ordre 2,

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = K_a \quad (6.34)$$

une valeur finie, et l'erreur statique est :

$$e_{ss} = \frac{k_r}{K_a} \quad (6.35)$$

Pour les systèmes de type supérieur à 2, $K_a = \infty$ et $e_{ss} = 0$.

EXEMPLE 4

Calculer l'erreur statique due à une entrée parabolique pour le système suivant :

$$G_o(s) = \frac{(s + 0.2)}{s^2(s^2 + 3s + 1)}$$

En boucle fermée,

$$T(s) = \frac{(s + 0.2)}{s^2(s^2 + 3s + 1) + (s + 0.2)} = \frac{s + 0.2}{s^4 + 3s^3 + s^2 + s + 0.2}$$

Table de Routh :

s^4	1	1	0.2
s^3	3	1	0
s^2	0.66	0.2	0
s^1	0.1	0	0
s^0	0.2	0	0

Le système est stable, quoique très peu.

La constante d'accélération (puisque le système est de type 2) est :

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_o(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s + 0.2}{s^2 + 3s + 1} = 0.2$$

Ceci donne une erreur statique de

$$e_{ss} = \frac{k_r}{K_a} = 5$$

6.3.4 Récapitulation

L'erreur statique pour différents systèmes est résumée dans le tableau 6.1.

TABLEAU 6.1 – Erreur statique pour différents systèmes

Type	K_p	K_v	K_a	Erreur statique		
				Échelon	Rampe	Parabole
0	K	0	0	$\frac{k_r}{1 + K_p}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{k_r}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{k_r}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

6.4 Design en fonction de l'erreur statique

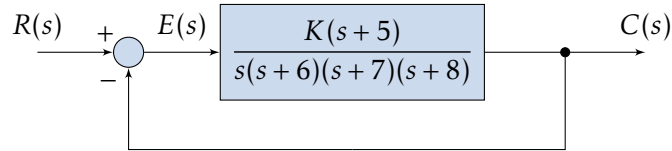
L'erreur statique peut être un paramètre de design, tout comme T_p , T_s , T_r et M_p . Les constantes K_p , K_v et K_a peuvent être utilisées comme contraintes de design ; elles permettent aussi de recueillir de l'information sur le système sous étude.

Par exemple, si un système de contrôle a un paramètre $K_v = 1000$, on peut conclure :

- Le système est stable.
- Le système est de type 1.
- Une entrée rampe est utilisée comme signal de test.
- L'erreur statique est $\frac{1}{K_v}$ par rapport à la pente du signal d'entrée.

EXEMPLE 5

Soit le système suivant :



Trouver la valeur de K pour obtenir une erreur statique de 10%.

Le système est de type 1 : il faut donc appliquer une entrée rampe.

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0.1$$

$$K_v = 10 = \lim_{s \rightarrow 0} sG_o(s) = \frac{5K}{(6)(7)(8)} \Rightarrow K = 672$$

On vérifie la stabilité du système :

$$T(s) = \frac{672(s+5)}{s(s+6)(s+7)(s+8) + 672(s+5)} = \frac{672(s+5)}{s^4 + 21s^3 + 146s^2 + 1008s + 3360}$$

Table de Routh :

s^4	1	146	3360
s^3	21 1	1008 48	0
s^2	98 7	3360 240	0
s^1	13.71	0	0
s^0	240	0	0

Puisqu'il n'y a aucun changement de signe, le système est stable.