Chapitre 7

Contrôleurs

On a vu dans les chapitres précédents les différents types de systèmes ainsi que les paramètres qui les définissent. Souvent, pour des systèmes sous étude, il y a quelques paramètres dont on désire améliorer, comme le dépassement maximal, ou réduire l'erreur statique, ou améliorer le temps de réponse.

Pour améliorer la réponse des systèmes, on se sert de contrôleurs. Ces contrôleurs seront placés avant le système sous étude afin de modifier la caractéristique globale du système.

On verra aussi en fin de chapitre comment implanter ces contrôleurs à l'aide de circuits composés d'ampli-op, de résistances et condensateurs.

7.1 Contrôleur proportionnel (P)

On a déjà vu des exemples où l'on ajoutait un gain dans une boucle pour rendre un système stable, par exemple, ou réduire l'erreur statique.

Le contrôleur P est simple : il s'agit que d'un gain K_{prop}, comme à la figure 7.1.

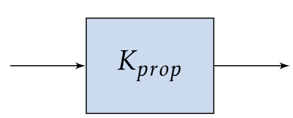


Figure 7.1 – Contrôleur proportionnel

Donc un système avec un contrôleur P ressemblerait au système de la figure 7.2.

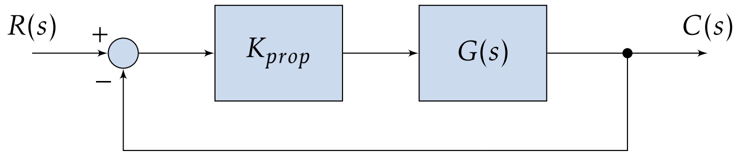


FIGURE 7.2 – Contrôleur proportionnel dans un système

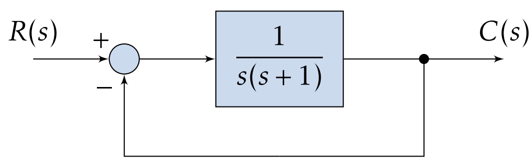
La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$T(s) = \frac{K_{prop}G(s)}{1 + K_{prop}G(s)} \tag{7.1}$$

Selon l'équation précédente :
- L'ajout d'un contrôleur P ne change pas le type d'un système.
- Aucun nouveau pôle ou zéro n'est ajouté au système.
- Seule la position des pôles et zéros peut changer.

EXEMPLE 1

Soit le système suivant :



On ajoute un contrôleur P.

1. Quel est le type du système ?
2. Quelle est l'erreur statique pour :
   (a) Entrée échelon ?
   (b) Entrée rampe ?

---

1. On trouve la fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_o(s) = \frac{K_{prop}}{s(s+1)}$$

Le système est de type 1.

2. Erreur statique :

a) Entrée échelon :

$$K_p = \lim_{s \to 0} G_o(s) = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

b) Entrée rampe :

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG_o(s) = K_{prop}$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_{prop}}$$

7.2 Contrôleur intégral (I)

Avec un intégrateur, la sortie du contrôleur est l'intégrale du signal d'entrée, soit :

$$\text{Sortie } = K_i \int_o^t \text{Entrée } dt \tag{7.2}$$

ou

$$G_c(s) = \frac{K_i}{s} \tag{7.3}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G_o(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_i}{s}G(s) \tag{7.4}$$

On voit, selon l'équation 7.4, qu'on a ajouté un pôle au système et augmenté le type du système. Ce qui veut dire que si le système est de type 0, avec une erreur statique, cette erreur statique sera nulle puisque le système est maintenant de type 1. Par contre, le contrôleur intégral peut rendre un système instable, et il est rarement utilisé seul.

Exemple 2

On utilise le même système que l'exemple 1, sauf qu'on se sert d'un contrôleur I.

1. Quel est le type du système ?
2. Quelle est l'erreur statique pour :
   (a) Entrée échelon ?

(b) Entrée rampe ?

3. Comparer la stabilité avec celle de l'exemple 1.

---

1. Type du système :

$$G_o(s) = \frac{K_i}{s^2(s+1)} \Rightarrow \text{ Type 2}$$

2. Erreur statique :

a) Entrée échelon :

$$K_p = \lim_{s\to 0} G_o(s) = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = 0$$

b) Entrée rampe :

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_o(s) = \infty$$
$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0$$

(mieux qu'avec un contrôleur P)

3. Stabilité

a)

$$T(s) = \frac{K_{prop}}{s^2+s+K_{prop}}$$

Table de Routh :

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & K_{prop} \\ s^1 & 1 & 0 \\ s^0 & K_{prop} & 0 \end{array}$$

Le système est stable si $K_{prop} > 0$.

b)

$$T(s) = \frac{K_i}{s^3+s^2+K_i}$$

Table de Routh :

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 0 \\ s^2 & 1 & K_i \\ s^1 & -K_i & 0 \\ s^0 & K_i & 0 \end{array}$$

Le système est instable pour toutes les valeurs de K_i. Dans ce cas, l'utilisation d'un contrôleur I n'a pas aidé.

7.3 Contrôleur proportionnel-intégral (PI)

On peut réduire l'instabilité relative du contrôleur intégral en combinant les deux, P et I. Dans ce cas,

$$G_c(s) = K_{prop} + \frac{K_i}{s} = \frac{K_{prop}\left(s + \frac{K_i}{K_{prop}}\right)}{s} \tag{7.5}$$

$$= \frac{K_{prop}\left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)}{s} \tag{7.6}$$

où τ_i est la constante de temps intégrale.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système est :

$$G_o(s) = \frac{K_{prop}\left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)G(s)}{s} \tag{7.7}$$

Donc un zéro à $-\frac{1}{\tau_i}$ et un pôle à zéro ont été ajoutés au système.

EXEMPLE 3

On utilise le même système que l'exemple 1, contrôlé cette fois par un PI avec $\tau_i = 2$.

1. Quel est le type du système ?
2. Quelle est l'erreur statique pour :
   (a) Entrée échelon ?
   (b) Entrée rampe ?
3. Comparer la stabilité avec celle de l'exemple 1 et 2.

---

1. Type du système :

$$G_o(s) = \frac{K_{prop}\left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)G(s)}{s} = \frac{K_{prop}\left(s + \frac{1}{\tau_i}\right)}{s^2(s+1)} = \frac{K_{prop}(s+0.5)}{s^2(s+1)}$$

Le système est de type 2.

2. Erreur statique :

a) Entrée échelon : $e_{ss} = 0$ pour un système de type 2 à une entrée échelon.

b) Entrée rampe : $e_{ss} = 0$ pour un système de type 2 à une entrée rampe.

3. Stabilité

$$T(s) = \frac{K_{prop}(s+0.5)}{s^2(s+1)+K_{prop}(s+0.5)} = \frac{K_{prop}(s+0.5)}{s^3+s^2+K_{prop}s+0.5K_{prop}}$$

Table de Routh :

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & K_{prop} \\ s^2 & 1 & 0.5K_{prop} \\ s^1 & 0.5K_{prop} & 0 \\ s^0 & 0.5K_{prop} & 0 \end{array}$$

Le système est stable si $K_{prop} > 0$. L'ajout de la composante P au contrôleur I a rétabli la stabilité.

7.4 Contrôleur dérivateur (D)

Pour un contrôleur dérivateur, on dérive le signal à l'entrée. Ceci veut dire que pour un changement abrupte du signal à l'entrée, le signal de contrôle peut être très élevé.

La fonction de transfert est :

$$G_c(s) = K_d s \tag{7.8}$$

et en boucle fermée,

$$T(s) = \frac{K_d s G(s)}{1 + K_d s G(s)} \tag{7.9}$$

On utilise généralement le contrôleur D avec d'autre composantes (PD ou PID). De façon pratique, le contrôleur D peut présenter certains inconvénients, et on utilise plutôt un compensateur à avance de phase (Ch.9).

7.5 Contrôleur PID

Dans un contrôleur proportionnel-intégral-dérivateur (PID), les trois éléments de contrôle de base sont présents. La fonction de transfert est :

$$G_c(s) = K_{prop} + \frac{K_i}{s} + K_d s \tag{7.10}$$

ou

$$G_c(s) = K_{prop}\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right) \tag{7.11}$$

où

$$\tau_i = \frac{K_{prop}}{K_i} \tag{7.12}$$
$$\tau_d = \frac{K_d}{K_{prop}} \tag{7.13}$$

En boucle ouverte,

$$G_o(s) = G_c(s)G(s) \tag{7.14}$$
$$= \frac{K_{prop}(1 + \tau_i s + \tau_i \tau_d s^2)}{\tau_i s} G(s) \tag{7.15}$$

Il y a donc deux zéros de plus et un pôle de plus au système. Le facteur $\frac{1}{s}$ augmente aussi le type du système.

Le tableau 7.1 résume l'effet de chacun des types de contrôleurs sur les caractéristiques d'un système. Le contrôleur P va réduire le temps de montée et réduire l'erreur statique, sans pour autant l'éliminer complètement. Un contrôleur I éliminera l'erreur statique, mais peut rendre la réponse transitoire pire. Le contrôleur D augmentera la stabilité d'un système, réduira le dépassement et peut améliorer la réponse transitoire.

Tableau 7.1 – Résumé des propriétés des contrôleurs

Contrôleur	T_r	M_p	T_s	**Erreur statique**
K_{prop}	Diminue	Augmente	Effet faible	Diminue
K_i	Diminue	Augmente	Augmente	Élimine
K_d	Effet faible	Diminue	Diminue	Effet faible

Il faut noter que ce résumé n'est que général ; l'effet de modifier la valeur d'un contrôleur peut affecter l'effet des deux autres.

7.6 Détermination des paramètres du PID

Il n'existe pas de méthode analytique pour déterminer les paramètres K_{prop}, K_d et K_i. Quelques méthodes existent, notamment deux par Ziegler-Nichols, et une par Cohen-Coon.

7.6.1 Courbe de réaction : Ziegler-Nichols

Cette méthode s'applique plutôt à des systèmes ayant un délai dont le comportement ressemble celui d'un système de premier ordre. Ce type de réponse est souvent retrouvé dans les procédés chimiques et thermiques.

Soit un système dont la réponse est donnée à la figure 7.3.

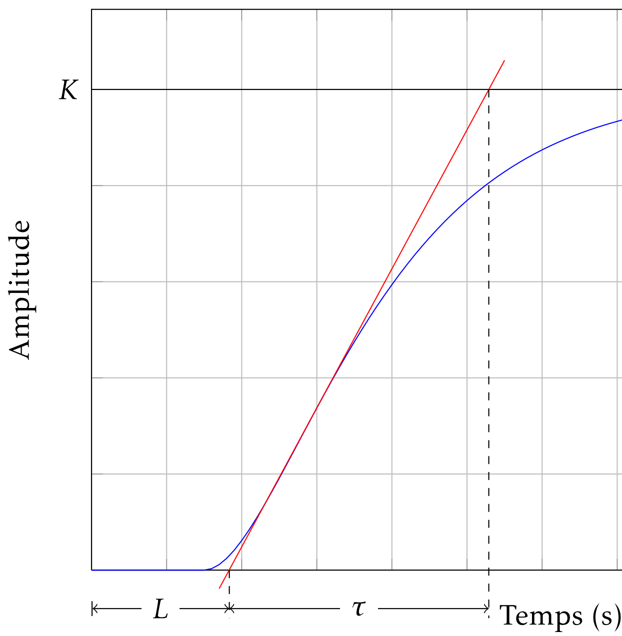


FIGURE 7.3 – Réponse d'un système : courbe de réaction

On peut approximer la fonction de transfert par la relation suivante :

$$G(s) = \frac{Ke^{-\tau_d s}}{\tau s + 1} \tag{7.16}$$

Le terme $e^{-\tau_d s}$ représente un délai (où $\tau_d = L$). On recherche la pente maximale $R = K/\tau$. Par après, les valeurs du tableau 7.2 sont utilisées dans le contrôleur voulu.

7.6.2 Méthode de Cohen-Coon

La méthode de Cohen-Coon est une variation de la méthode de la courbe de réaction de Ziegler-Nichols. Comme la première méthode de Ziegler-Nichols, cette technique s'applique à des systèmes dont la réponse ressemble à celle d'un système de premier ordre. Les paramètres sont donnés dans le tableau 7.3.

TABLEAU 7.2 – Paramètres de design, contrôleurs P, PI et PID : Ziegler-Nichols 1

	K_{prop}	K_i	K_d
P	$\frac{1}{RL}$		
PI	$\frac{0.9}{RL}$	$\frac{3}{10RL^2}$	
PID	$\frac{1.2}{RL}$	$\frac{0.6}{RL^2}$	$\frac{0.6}{R}$

TABLEAU 7.3 – Paramètres de design, contrôleurs P, PI et PID : Cohen-Coon

	K_{prop}	τ_i	τ_d
P	$\frac{1}{RL}\left(1+\frac{L}{3\tau}\right)$		
PI	$\frac{1}{RL}\left(0.9+\frac{L}{12\tau}\right)$	$L\frac{30+3(L/\tau)}{9+20(L/\tau)}$	
PID	$\frac{1}{RL}\left(\frac{4}{3}+\frac{L}{4\tau}\right)$	$L\frac{32+6(L/\tau)}{13+8(L/\tau)}$	$L\frac{4}{11+2(L/\tau)}$

REMARQUE : Les paramètres sont pour un PID dont la fonction de transfert est de la forme donnée à l'équation 7.11.

7.6.3 Méthode d'oscillations : Ziegler-Nichols

Pour cette méthode, on se sert de la stabilité critique. Soit le système de la figure 7.4.

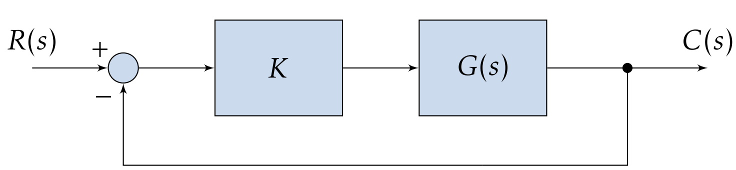


FIGURE 7.4 – Système sous étude : Ziegler-Nichols

On ajuste le gain K à une valeur faible. On augmente ensuite le gain K jusqu'à ce que le système soit marginalement stable (limite de stabilité). On note le gain critique, K_u.

On doit aussi mesurer la période des oscillations, T_u, comme à la figure 7.5.

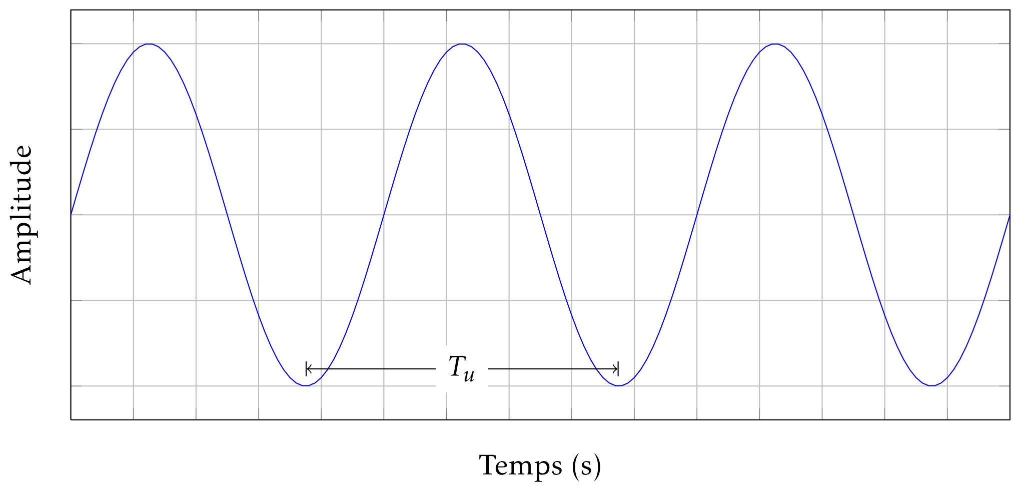


FIGURE 7.5 – Réponse d'un système : Ziegler-Nichols

Par après, on utilise les valeurs du tableau 7.4 pour calculer les paramètres des contrôleurs.

TABLEAU 7.4 – Paramètres de design, contrôleurs P, PI et PID : Ziegler-Nichols 2

	K_{prop}	K_i	K_d
P	$0.5K_u$		
PI	$0.45K_u$	$\frac{0.54K_u}{T_u}$	
PID	$0.6K_u$	$\frac{1.2K_u}{T_u}$	$0.075K_uT_u$

Il faut noter que les paramètres donnés dans les tableaux 7.2, 7.3 et 7.4 ne sont que des valeurs nominales, et non pas optimales. Il peut être nécessaire de varier ces paramètres quelque peu afin d'obtenir une meilleur réponse. De plus, d'autres méthodes peuvent donner de meilleurs résultats, mais elles sont plus complexes.

EXEMPLE 4

Soit un système ayant la fonction de transfert suivante :

$$G_o(s) = \frac{3}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Calculer la valeur des composantes pour réaliser un contrôleur PID.

Il faut trouver la valeur du gain critique K_u et la période critique T_u. Pour un système simple comme celui-ci, il suffit d'utiliser la table de Routh pour obtenir le gain critique, puis simuler et mesurer la période.

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$T(s) = \frac{3K}{s^3 + 6s^2 + 11s + (6 + 3K)}$$

La table de Routh est alors :

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6+3K \\ s^1 & \dfrac{66-(6+3K)}{6} & 0 \\ s^0 & 6+3K & 0 \end{array}$$

Pour que le système soit stable, il faut que

$$\begin{aligned} &a)\ 66 - (6+3K) > 0 \Rightarrow K < 20 \\ &b)\ 6 + 3K > 0 \Rightarrow K > -2 \end{aligned}$$

Le gain critique est donc $K_u = 20$.

Si on simule le système avec le gain critique, on obtient une période de $T_u \approx 1.9$s. On peut aussi calculer la fréquence d'oscillation du système avec le gain critique. On utilise le polynôme s^2 de la table de Routh, puis on isole ω_c en remplaçant $s = j\omega_c$.

$$6s^2 + 6 + 3K = 6s^2 + 66 = s^2 + 11$$

On substitue $s = j\omega_c$,

$$(j\omega_c)^2 + 11 = 0 \Rightarrow \omega_c = \sqrt{11}$$

et la période est :

$$T_u = \frac{2\pi}{\omega_c} = 1.89 \text{ s}$$

Les paramètres du PID sont :

- $K_{prop} = 12$
- $K_i = 12.7$
- $K_d = 2.84$

Pour comparer la réponse du système, on simule avec un contrôleur P, un contrôleur PI et un contrôleur PID, en utilisant les valeurs appropriées du tableau 7.4. Les différentes réponses sont données à la figure 7.6.

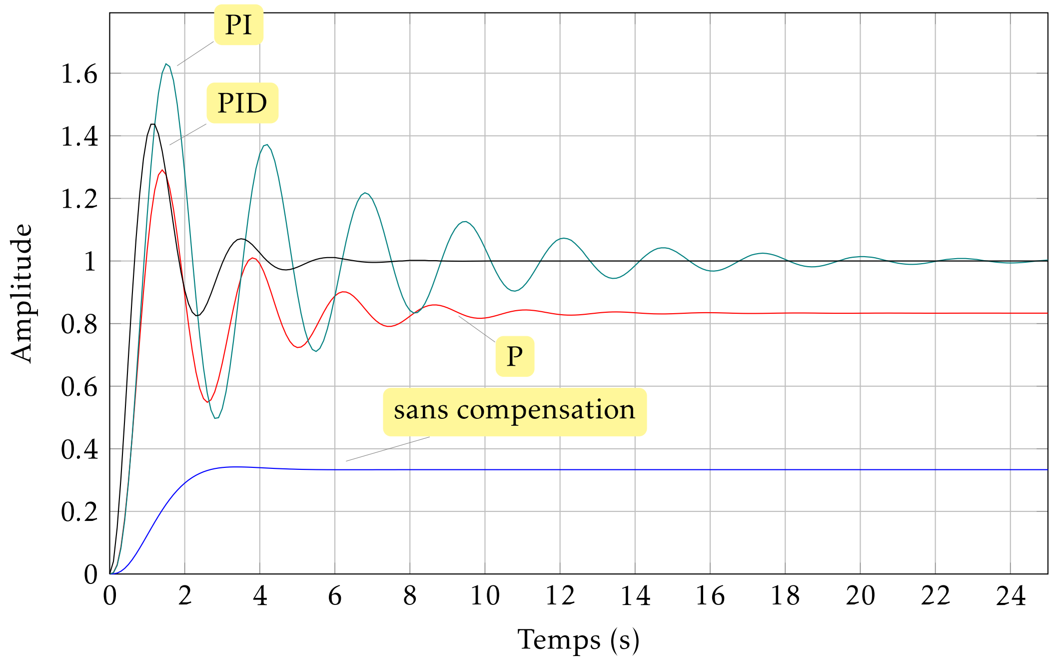


Figure 7.6 – Simulation des réponses des compensateurs

7.7 Circuits pratiques

Pour réaliser physiquement les contrôleurs, on utilise des circuits à ampli-op. La figure 7.7 illustre un ampli-op en configuration d'amplificateur avec feedback négatif. On utilise des résistances et des condensateurs pour réaliser les fonctions voulues.

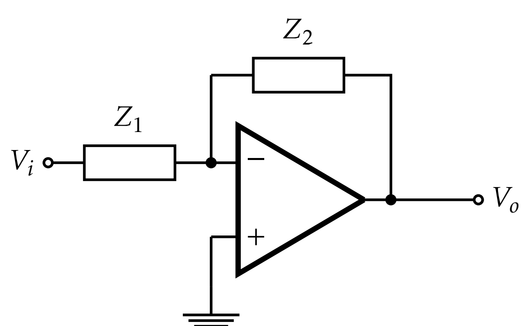


Figure 7.7 – Ampli-op comme amplificateur avec feedback négatif

Pour réaliser chacun des contrôleur, on a qu'à utiliser l'impédance nécessaire à Z_1 et Z_2.

Gain

Pour réaliser un contrôleur P, il suffit que :

$$Z_1 = R_1 \tag{7.17}$$
$$Z_2 = R_2 \tag{7.18}$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} \tag{7.19}$$

d'où on obtient

$$K_{prop} = \frac{R_2}{R_1} \tag{7.20}$$

Il faudra ajouter un inverseur pour obtenir un gain positif.

Intégrateur

Ici,

$$Z_1 = R \tag{7.21}$$
$$Z_2 = C \tag{7.22}$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{\frac{1}{RC}}{s} \tag{7.23}$$

d'où on obtient

$$K_i = \frac{1}{RC} \tag{7.24}$$

Dérivateur

Dans ce cas,

$$Z_1 = C \tag{7.25}$$
$$Z_2 = R \tag{7.26}$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{V_o}{V_i} = -sRC \tag{7.27}$$

d'où on obtient

$$K_d = RC \tag{7.28}$$

Contrôleur PI

Il s'agit d'une combinaison des contrôleurs P et I, soit :

$$Z_1 = R_1 \tag{7.29}$$
$$Z_2 = R_2 + C \tag{7.30}$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}\frac{\left(s + \frac{1}{R_2 C}\right)}{s} \tag{7.31}$$

d'où on obtient

$$K_{prop} = \frac{R_2}{R_1} \tag{7.32}$$
$$\tau_i = R_2 C \tag{7.33}$$

Contrôleur PID

On combine les trois contrôleurs de base :

$$Z_1 = R_1 // C_1 \tag{7.34}$$
$$Z_2 = R_2 + C_2 \tag{7.35}$$

La fonction de transfert est :

$$\frac{V_o}{V_i} = -\left[\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2}\right) + sR_2C_1 + \frac{\frac{1}{R_1 C_2}}{s}\right] \tag{7.36}$$

d'où on obtient

$$K_{prop} = \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \tag{7.37}$$
$$K_i = \frac{1}{R_1 C_2} \tag{7.38}$$
$$K_d = R_2 C_1 \tag{7.39}$$

Note : Dans la réalisation pratique des contrôleurs, on a une inconnue de plus que le nombre de paramètres connus. Par exemple, dans le cas du contrôleur PID, on a trois paramètres connus (K_{prop}, K_i et K_d), mais quatre inconnues (R_1, R_2, C_1 et C_2). Il faudra donc choisir arbitrairement une valeur, puis calculer les autres. On choisit habituellement un condensateur en premier.