Pour résoudre le système $Ax = b$, il faut connaître b. En général, celui-ci n'est pas connu avec une précision infinie car il peut y avoir des erreurs de mesures et car la précision des instruments et de l'ordinateur n'est pas infinie. On s'intéresse donc à l'erreur qui peut être commise sur x à cause des imprécisions sur b. La valeur pertinente est l'erreur relative $\|\Delta x\|/\|x\|$.

Exercice 1. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1001 & 1000 \\ 1000 & 1001 \end{pmatrix} .$$

1. Montrer que A admet une base orthonormale de vecteurs propres dont on donnera les valeurs propres.
2. Expliciter la résolution de l'équation $Ax = b$ en fonction des éléments propres.
3. Résoudre le système $Ax = b$ avec $b = (1, 1)$. On a en fait une petite erreur sur b qui est donné par Δb avec $\|\Delta b\|/\|b\|$ de l'ordre de $0,01$. On a donc une erreur Δx sur x donnée par $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Montrer que l'erreur relative $\|\Delta x\|/\|x\|$ peut être de l'ordre de 20.

Exercice 2. On considère le système $Ax = b$ avec $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Les données A et b sont imprécises. On a donc en réalité le système linéaire

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b .$$

Etant donnée une norme subordonnée (par exemple L^2), on définit le conditionnement de la matrice A par $\kappa(A) = |||A|||.|||A^{-1}|||$.

1. Montrer que si $\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} < \frac{1}{\kappa(A)}$, on a

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{|||\Delta A|||}{|||A|||}} \left(\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} + \frac{|||\Delta A|||}{|||A|||} \right)$$

   Indication :$(A+\Delta A)^{-1} = (A(I+A^{-1}\Delta A))^{-1}$ et utiliser le développement en séries entières de $(1 + x)^{-1}$ pour $|x| < 1$.
2. Montrer que le conditionnement de A est minoré par le rapport $|\lambda_n/\lambda_1|$, où λ_n et λ_1 sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre en module. Expliquer l'exercice précédent du point de vue du conditionnement.
3. Montrer que le conditionnement d'une matrice unitaire est 1 pour la norme L^2. C'est pour cette raison que l'on utilise des matrices unitaires dans des algorithmes itératifs, on garantit ainsi la stabilité numérique.

Exercice 3. On cherche à résoudre le système $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} .$$

1) Calculer la solution exacte x du système. Quelle différence y-a-t-il entre `linsolve(A,b)` et `inv`$(A) * b$?

2) Calculer la solution y du système perturbé $(A + \Delta A)y = b$ avec

$$\Delta A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.08 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & -0.02 & -0.11 & 0 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 \end{pmatrix}$$

On note $\Delta x = y - x$. Déterminer le coefficient d'amplification d'erreur :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \frac{|||A|||_2}{|||\Delta A|||_2}.$$

et de même en échangeant le rôle de x et y et de A et $A + \Delta A$. Dans cette expression la norme $\|u\|_2$ d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est définie par $\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^n u_i^2$ et celle d'une matrice A correspond à celle de l'application linéaire associée. Elles se calculent par la commande **l2norm()** pour un vecteur et avec `SVL` pour une matrice.
3) Calculer la solution du système perturbé $Az = b + \Delta b$ avec

$$\Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta x = z - x$. Déterminer le coefficient d'amplification d'erreur :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\Delta b\|_2}.$$

Que remarquez vous ?
4) Calculer le conditionnement en norme $\| \ \|_2$ de la matrice A : $\kappa_2(A) = ||||A||||_2.||||A^{-1}||||_2$. Retrouver ce résultat avec la commande `COND(.,2)`. Comparer conditionnement et erreurs relatives. Montrer que

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x + \Delta x\|_2} \times \frac{|||A|||_2}{|||\Delta A|||_2} \leq \kappa_2(A) \quad \text{et} \quad \frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \times \frac{\|b\|_2}{\|\Delta b\|_2} \leq \kappa_2(A)$$

5) Calculer les valeurs propres de A avec la commande `egvl`. Calculer le rapport $\lambda_{max}/\lambda_{min}$ des valeurs propres de A.
6) Montrer que le conditionnement d'une matrice normale est le rapport entre sa plus grande et sa plus petite valeur propre (en valeur absolue).
7) Refaire les calculs ci-dessus avec une autre norme, par exemple L^1.

Exercice 4. (CC mars 2014)
On travaille en arithmétique flottante avec 14 chiffres significatifs. On s'intéresse au calcul des solutions de l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ à coefficients réels, en particulier lorsque b^2 est grand devant $|ac|$, par exemple pour $x^2+12345678x+1.0=0$.

1. Donner une valeur approchée des deux solutions de l'exemple en appliquant la formule habituelle $r_\pm = (-b \pm \sqrt{b^2-4ac})/(2a)$ et discuter leur erreur relative.
2. Comparer l'erreur relative pour la solution la moins précise avec l'erreur relative de la valeur approchée obtenue en appliquant la formule $r_+r_- = c/a$.
3. Écrire une fonction prenant a, b, c en arguments et renvoyant deux solutions précises de l'équation (on distinguera deux cas en fonction du signe de b).

Exercice 5. Soit P une matrice transposée d'une matrice stochastique, c'est-à-dire une matrice carrée de taille N dont les coefficients vérifient

$$a_{ij} \in [0,1], \quad \sum_{i=1}^{N} a_{ij} = 1$$

la somme des coefficients d'une colonne donnée vaut 1.
L'algorithme PageRank de Google construit une telle matrice à partir du graphe connectant les pages web entre elles en posant $a_{ij} = \frac{1}{n_j}$ si la page j pointe vers la page i et 0 sinon, avec n_j le nombre de liens émis par la page j (chaque lien représente en quelque sorte un vote, dont le poids est pondéré par le nombre de liens). Par exemple

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

correspondrait à un web jouet de 5 pages où la page 1 pointe vers les pages 3 et 5, la page 2 vers la page 3, la page 3 vers 1, 2, 4, 5, la page 4 vers les pages 3 et 5 et la page 5 vers elle-même.
On s'intéresse à la solution de

$$(I-\alpha P)r = \frac{1}{N}(1,...,1), \quad \alpha \in]0,1[$$

Dans PageRank $\alpha = 0.15$ et r_j donne le rang de classement de la page j (en pratique, on ne le calcule pas en résolvant ce système linéaire mais par la méthode de la puissance)

1. Déterminer la norme de P comme application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ subordonnée à la norme L^1 dans $\mathbb{R}^N$

$$|||P|||_1 = \max_{\{r/\|r\|_1=1\}} \|Pr\|_1, \quad \|r\|_1 = \sum_{j=1}^{N} |r_j|$$

2. En déduire que si $\alpha \in]0,1[$ alors $I-\alpha P$ est inversible, d'inverse

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j P^j$$

   Donner une majoration du nombre de condition de $I-\alpha P$. Vérifiez avec la matrice donnée en exemple.

3. Que peut-on dire de la précision de la solution r renvoyée en fonction de α (par exemple pour $\alpha = 0.15$, pour α proche de 1) ?