**Exercice 1.** On va illustrer le fait que pour une méthode d'ordre $n$ et une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, il existe une constante $C$ telle que l'erreur $E_N$ de la méthode pour $N$ subdivisions est $\leq \frac{C}{N^{n+1}}$.
On prend $f = \cos$ et on approche $\int_0^2 \cos(x)dx = \sin(2)$ par la méthode des trapèzes et de Simpson.
Calculer l'erreur $E_N$ pour $N \in \{2, 2^2, \dots, 2^{10}\}$ pour les méthodes des trapèzes et de Simpson et représenter graphiquement $(\log(N), -log(E_N))_{N\in\{2,2^2,\dots,2^{10}\}}$. Commenter ce que vous obtenez.
Même question pour $\int_0^3 \cos(x)e^{\sin(x)}$.

**Exercice 2.** On souhaite approcher

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin(x)^2}}\,dx$$

par la méthode de Simpson. Soit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin(x)^2}}$$

1. (a) Calculer et simplifier la dérivée d'ordre 4 $f_4$ de $f$ (on ne demande pas de justifier les calculs).
   (b) Conjecturer un majorant de $|f_4|$ sur $[0, \pi/2]$ à l'aide d'une représentation graphique de $f_4$ sur cet intervalle. On notera $M_4$ ce majorant.
   (c) Calculer et simplifier la dérivée 5-ième de $f$, montrer que $f_5$ s'annule si et seulement si $x = 0, \pi/2$ ou si $\cos(x)$ est racine du polynôme $P$ de degré 8 que l'on déterminera
   (d) Déterminer une valeur approchée des racines de $P$ sur $[0, 1]$ (par exemple à l'aide de `solve`) puis donner une valeur approchée du(des) $x$ correspondant(s).
   (e) Calculer $f_4(0)$, $f_4(\pi/2)$ et $f_4(x)$ pour ces racines, en déduire une preuve de la majoration de $|f_4|$ par $M_4$.
2. Combien de subdivisions faut-il pour être sur que la méthode de Simpson donnera une valeur approchée de $K$ avec une précision inférieure à `1e-8` ?
3. Donner une valeur approchée de $K$ par la méthode de Simpson en utilisant ce nombre de subdivisions.

**Exercice 3.** On s'intéresse à une formule de quadrature obtenue en interpolant sur une subdivision élémentaire $[\alpha, \alpha + h]$ en 5 points régulièrement répartis :

$$x_0 = \alpha, x_1 = \alpha + \frac{h}{4}, x_2 = \alpha + \frac{h}{2}, x_3 = \alpha + \frac{3h}{4}, x_4 = \alpha + h$$

1. Calcul des coefficients :
   On définit le polynôme d'interpolation en les $(x_i, y_i)$ par

   `P:=lagrange([a,a+h/4,a+h/2,a+3h/4,a+h],[y0,y1,y2,y3,y4])`

   Déterminer avec Xcas la valeur de `int(P,x,a,a+h)` et en déduire la formule de quadrature $I(f)$ sur $[a, b]$ de pas $h = (b - a)/N$.

2. Ordre et erreur :
   Déterminer le plus petit $n$ tel que la formule d'intégration ne soit plus exacte pour $x^n$ et en déduire l'ordre de cette formule. Noyau de Péano ? Puis majoration de l'erreur pour $f$ suffisamment régulière.
3. Soit $f(x) = \exp(-x^2)$. Calculer à la machine $f^{[6]}, f^{[7]}$, en déduire une majoration de $f^{[6]}||$ sur $[0, 2]$ Déterminer un nombre de subdivisions $N$ telle que $| \int_0^2 f(x)dx - I(f)| \leq \varepsilon$. En déduire une valeur approchée à `1e-10` près de l'intégrale.

**Exercice 4.** Quadrature gaussienne
On utilise la méthode d'intégration suivante sur une subdivision $[\alpha, \beta]$ (par interpolation en 2 points bien choisis) :

$$I(f) = (\beta - \alpha) \left( \frac{1}{2} f \left( \frac{1 + \sqrt{1/3}}{2} \alpha + \frac{1 - \sqrt{1/3}}{2} \beta \right) + \frac{1}{2} f \left( \frac{1 - \sqrt{1/3}}{2} \alpha + \frac{1 + \sqrt{1/3}}{2} \beta \right) \right)$$

1. Déterminer l'ordre de cette méthode, en déduire une majoration de l'erreur.
2. Programmer cette méthode pour calculer $\int_a^b f(t)\ dt$ en découpant l'intervalle $[a, b]$ en $N$ subdivisions.
3. Déterminer $N$ pour que avoir une valeur approchée de l'intégrale à `1e-8` prés pour $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $a = 0$ et $b = 1$.
4. Expliquez le choix des points d'interpolation.
5. Donner une formule d'ordre maximal qui évalue la fonction à intégrer en 7 points par subdivisions.

**Exercice 5.** Fonction périodique et formule des trapèzes.
Soit $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

1. Calculer $I(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\ dx$. Calculer $T_N(f)$, la valeur obtenue en approchant $I(f)$ par la méthode des trapèzes pour $N$ subdivisions (pas de $h = 2\pi/N$). En déduire que pour $N > m$, alors $I = T_N(f)$.
2. Si $f$ est périodique et de classe $C^j, j > 2$, que peut-on dire de la décroissance de ses coefficients de Fourier ? En déduire que la méthode des trapèzes approche $I(f)$ avec une erreur en $O(N^{1-j})$.
3. Essayez de faire la même chose pour une méthode d'ordre plus élevé. Quelle méthode d'intégration semble judicieuse pour intégrer une fonction périodique ?

**Exercice 6.** Programmez et testez l'accélération de Richardson-Romberg, en partant de la formule des trapèzes (ou du point milieu).