Exercice 1. On utilise la méthode de dichotomie pour résoudre une équation $f(x) = 0$ avec $x \in [a, b]$. On veut une approximation d'une solution à $\varepsilon > 0$ près. Montrer qu'on aura besoin d'au plus $\lceil \ln_2(b - a) - \ln_2 \varepsilon \rceil$ itérations de l'algorithme, où $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ désignent respectivement le plus grand entier inférieur à x et le plus petit entier supérieur à x.
Comparer avec une méthode de point fixe $g(x) = x$ (telle que $f(x) = 0$ équivaut à $g(x) = x$) de constante de contractance $k < 1$.
Exemple on prendra $g(x) = \cos(x)$ sur $[0, 1]$.

Exercice 2. Méthode de Newton-Heron
Soit $a > 0$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer la méthode de Newton pour déterminer une valeur approchée de $a^{\frac{1}{n}}$. On donnera une valeur de départ u_0 de la suite qui garantit la convergence.
Illuster pour $n = 2, n = 3$ et $a = 2, a = 3$. Donner une majoration de l'erreur pour u_4 et u_5 lorsque $u_0 = a$.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(\mathrm{x})$.
L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution 0.
Pour quelles valeurs de x_0 la méthode de Newton converge-t'elle ?

Exercice 4. Vitesse de convergence quadratique, d'ordre p.
On dit que la suite converge avec une *vitesse d'ordre au moins* p s'il existe $C > 0$ tel que $|x_{n+1} - x| \le C|x_n - x|^p$ à partir d'un certain rang. Comment se comporte le nombre de décimales exactes d'une suite convergent à vitesse au moins p lorsque $p > 1$? Calculer le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une précision de n décimales. Comparer avec une suite convergeant à vitesse quadratique ou linéaire. Dicuster l'intérêt de telles méthodes.

Exercice 5. Méthode de la sécante : si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposés, au lieu de faire une dichotomie, on prend la corde reliant $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$, c l'abscisse de l'intersection avec l'axe des x puis on copie b dans a et c dans b. Tester pour $f(x) = x^2 - 2$ sur $[1, 2]$.

Exercice 6. On considère les applications définies sur $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0\}$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, 1 + \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^4 + y^4})$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Phi(x, y) = (1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} - x, 1 + \frac{1}{4}\sqrt[4]{x^4 + y^4} - y)$$

Partie I

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur Ω et calculer F'.
2. Rappeler l'inégalité des accroissements finis pour les applications de classe C^1 définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que la norme triple d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ relative à la norme euclidienne vérifie :
$$|||A||| \leqslant \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2}$$
(indication : utiliser Cauchy-Schwarz pour majorer chaque coordonnée de $A(x, y)$)
4. Montrer que F est contractante sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Indication : se ramener par homogénéité en une variable et faire une étude de fonction.

5. Montrer que $[1,+\infty[\times[1,+\infty[$ est stable par F.
6. Déduire que la suite définie par $(x_0, y_0) = (1, 1)$ et $(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(x_n, y_n)$ converge vers $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2$.

Partie II

1. Montrer que Φ' est inversible pour tout $(x, y) \in \Omega$.
2. La méthode de Newton-Raphson pour résoudre $\Phi(x, y) = (0, 0)$ consiste à itérer une certaine application N. Décrire explicitement N.
3. Observer la convergence de la suite $(x_k, y_k)_k$.

Exercice 7.
Ecrire un programme itérant la méthode de dichotomie et la méthode de Newton pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'utiliser pour calculer $\sqrt{2}$. Tracer le nombre de décimales exactes en fonction du nombre d'itérations.
On appliquera ensuite la méthode de Newton à la fonction $x \mapsto \sin \pi x$ et on tracera le dixième itéré de la suite en fonction du point de départ de l'algorithme. Qu'observez-vous ?

Exercice 8. Utiliser la méthode de Newton pour résoudre $xe^{-x^2} = 0$ d'une part pour $x_0 = 0.52$ et d'autre part pour $x_0 = 0.42$.

Exercice 9.
Dessiner le graphe des courbes planes d'équations $x^2 + y^3 - x - y = 0$ et $x^4 + xy - y^2 - 2 = 0$ (on pourra utiliser la commande `implicitplot`). Combien y a-t-il de solutions au système (non-linéaire) suivant $\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^3 - x - y = 0 \\ x^4 + xy - y^2 - 2 = 0 \end{array} \right.$?
Donner une estimation grossière de chaque solution, puis raffiner cette estimation en utilisant la méthode de Newton.
Voir aussi les fonctions `solve` (pour des systèmes polynomiaux) et `fsolve` (approché).

Exercice 10. Soit A la matrice tridiagonale de taille n donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que
$$u_k = (\sin(\frac{k\pi}{n+1}), ..., \sin(\frac{kj\pi}{n+1}), ..., \sin(\frac{n\pi}{n+1}))$$
est vecteur propre de A et calculer la valeur propre associée. En déduire que les méthode de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation (pour $\omega < 2$) convergent.
2. Soit $b = (1, 0, ..., 0, 1)$. La solution du système linéaire $Ax = b$ est donnée par $x = (1, 1, ..., 1)$. Évaluer le nombre d'itérations pour avoir une précision de `1e-10` en appliquant la méthode de Jacobi, de Gauss-Seidel et de relaxation (avec $\omega = 1.5$). On fera des simulations pour $4 \leq n \leq 20$. Quel est le cout d'une itération en fonction de n ? Comment se compare cette méthode avec une méthode directe ?
3. Pour $n = 20$, représenter la fonction donnant le rayon spectral de la matrice de la méthode de relaxation en fonction de $\omega \in [0, 2]$. Trouver graphiquement le paramètre optimal et comparer le à $\frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(J)^2}}$.

Exercice 11. Méthode de Newton dans le plan complexe
On propose de représenter les bassins d'attraction des zéros de $z \mapsto z^3 - 1$ dans $\mathbb{C}$ pour la méthode de Newton.
Les zéros sont $Z = \{1, j, j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
Si $a \in Z$, on note $A(a) = \{z_0 \in \mathbb{C} \ / \ (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{tend vers } a\}$ où $z_{n+1} = \frac{2z_n^2+1}{3z_n^3}$. $A(a)$ est appelé le bassin d'attraction de a.
Soit $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Soit $A_{N,\epsilon}(a) = \{z_0 \in \mathbb{C} \ / \ |z_N - a| < \epsilon\}$.
Ecrire un programme qui colorie en rouge les points de $A_{N,\epsilon}(1)$, en vert ceux de $A_{N,\epsilon}(j)$ en bleu ceux de $A_{N,\epsilon}(j^2)$ et en jaune les autres.
Même exercice avec le polynome $z \mapsto (z-1)(z-a+\frac{1}{2})(z+a+\frac{1}{2})$ où $a = -0.00508 + 0.333136i$.
voir http ://images.math.cnrs.fr/La-methode-de-Newton-et-son.html