Université Rennes 1
Master Mathématiques- Module H12

Statistique paramétrique - TD 2

Exercice 1 *(Risque, admissibilité)*

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi $\mathcal{N}(m, 1)$, m est inconnu.

On définit la fonction de perte

$$L(T, m) = (T - m)^2 \mathbb{1}_{|T-m|\leq a} + a^{2-\gamma}|T - m|^\gamma \mathbb{1}_{|T-m|>a}$$

où $\gamma \in]0, 1[$ et $a > 0$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\overline{X}$ n'est pas un estimateur de risque minimal pour cette fonction de perte. Soient $m_0 \in I\!R$ et $\epsilon \in]0, 1[$. On introduit la variable aléatoire

$$T_\epsilon = m_0 \mathbb{1}_{S^2 \leq c_\epsilon} + \left(\frac{\overline{X} - m_0}{\epsilon} + m_0 \right) \mathbb{1}_{S^2 > c_\epsilon}$$

où c_ϵ est l'unique solution de l'équation en x : $P_m(S^2 > x) = \epsilon$ et $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

a) Vérifier que T_ϵ est un estimateur. Calculer son espérance.

b) Calculer le risque $R(T_\epsilon, m_0)$ au point m_0 et vérifier que $\lim_{\epsilon \to 0} R(T_\epsilon, m_0) = 0$

c) Que peut-on en déduire ?

Exercice 2 *(Comparaison d'estimateurs)*

Soit $X_1, \dots, X_n$ un échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$, avec $\theta > 0$ inconnu.

a) Estimation par la méthode des moments.

- a1) Donner un estimateur $\tilde{\theta}_n$ par la méthode des moments qui converge ps vers θ quand $n \to +\infty$.
- a2) Calculer son risque pour les fonctions de perte suivantes :

$$L_2(\theta, T) = (T - \theta)^2, \quad L_4(\theta, T) = (T - \theta)^4.$$

- a3) Pour tout $n \geq 1$, majorer $P_\theta(|\tilde{\theta}_n - \theta| \geq 10^{-3})$ (proposer plusieurs majorations).
  On sait de plus que $\theta \in]0, 5]$, minorer alors le nombre d'observations indépendantes pour que $P_\theta(|\tilde{\theta}_n - \theta| \geq 10^{-3}) \leq 10^{-2}$.

b) Etude de l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance de θ

- b1) Exprimer $\hat{\theta}_n$ en fonction de l'échantillon.
- b2) Donner la loi de $\hat{\theta}_n$, son espérance et sa variance.
- b3) Comparer l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance à l'estimateur $\tilde{\theta}_n$ étudié dans la question a).

Exercice 3

Comparer l'estimateur des moments et l'estimateur du maximum de vraisemblance pour les échantillons $X_1, \dots, X_n$ suivants

a) loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, avec $\theta > 0$.

b) loi Uniforme $\mathcal{U}([\theta - 1/2, \theta + 1/2])$.

Exercice 4 *(Mélange, Méthode des moments)*

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(a, 1)$ avec probabilité $p \in]0, 1[$ et la loi $\mathcal{N}(-a, 1)$ avec probabilité $1 - p$. On considère un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de même loi que X. Les paramètres a et p sont inconnus, estimer-les en utilisant la méthode des moments.

Exercice 5 *(Mélange, Max. de vraisemblance)*

Soit $\mathbb{P}_{\alpha,\lambda}$ la loi obtenue par un mélange de pondération α entre la masse de Dirac en 0 et la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On observe un échantillon $X_1, \dots, X_n$ de loi $\mathbb{P}_{\alpha,\lambda}$.

a) Justifier que $\mathbb{P}_{\alpha,\lambda}(\{0\}) = \alpha + (1 - \alpha)e^{-\lambda}$ et pour $k \in I\!N^*$, $\mathbb{P}_{\alpha,\lambda}(\{k\}) = (1 - \alpha)e^{-\lambda}\lambda^k/k!$.

b) Soit $S = card\{i : X_i = 0\}$. Vérifier que la vraisemblance de l'échantillon s'écrit sous la forme

$$L_{\alpha,\lambda}(X_1, \ldots, X_n) = c(n, \alpha, \lambda) d(\lambda, X_1, \ldots, X_n) \left(1 + \frac{\alpha}{1-\alpha} e^{\lambda}\right)^S$$

avec c et d des fonctions mesurables des arguments précisés.

c) On suppose λ fixé et connu. Montrer que l'estimateur $\hat{\alpha}$ du maximum de vraisemblance de α est unique et ne dépend que de S, λ et n.

d) Préciser la loi de S. Calculer le biais éventuel de $\hat{\alpha}$.

Exercice 6 *(Comparaison d'estimateurs)*

On suppose $\alpha > -1$ connu et $\beta > 0$ inconnu. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon extrait de la loi de densité

$$f_{\alpha,\beta}(x) = (\alpha + 1) x^{\alpha} \beta^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{[0,\beta]}(x).$$

a) Calculer l'estimateur $\tilde{\beta}_n$ des moments d'ordre 1.

b) Déterminer l'estimateur $\hat{\beta}_n$ du maximum de vraisemblance et préciser sa densité.

c) Comparer le biais et le risque quadratique de $\tilde{\beta}_n$ et $\hat{\beta}_n$. Que conclure ?

Exercice 7 *(Admissibilité)*

Soit $(\mathcal{H}, (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta})$ un modèle statistique tel que $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et tel que pour tout $\theta = (m, \sigma^2)$ la loi $\mathbb{P}_\theta$ admette m comme moyenne et σ^2 comme variance. Supposons que l'on désire estimer m sous perte quadratique.

Si φ est un estimateur de moyenne m et de variance σ^2 alors pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ l'estimateur $\psi_{a,b} = a\varphi + b$ est inadmissible dans chacun des cas suivants :

$$i) \quad a > 1 \qquad ii) \quad a < 0 \qquad iii) \quad a = 1 \text{ et } b \neq 0.$$