Université Rennes 1
Master Mathématiques - Module H12

Statistique paramétrique - TD 3

Exercice 1 *un peu de statistique Bayésienne*

Un des premiers exemples d'utilisation de la statistique Bayésienne remonte à Laplace en 1786. Celui-ci décida de répondre à la question suivante : au regard du nombre observé n_g de naissances masculines parmi n naissances à Paris, peut-on dire si la probabilité p qu'un enfant qui naisse soit un garçon est supérieure à 1/2. ?

a) Laplace munit le paramètre p d'une loi à priori uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. Ce choix vous semble t'il naturel ?

b) Exprimer alors la loi à postériori de p, puis exprimer la probabilité $\mathbb{P}(p > 1/2 | N_g = n_g)$ sous formes d'intégrales

c) Donner l'espérance et la variance de la loi à postériori. Exprimer leurs limites lorsque $n \to +\infty$ en fonction de la vraie valeur p_0 du paramètre p.

Rappel : la loi Beta $B(\alpha, \beta)$ de paramètres $\alpha > 0$, $\beta > 0$ admet pour densité : $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ où $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$. Son espérance est $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et sa variance est $\mathrm{Var}(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$.

d) Ces limites sont-elles modifiées si on choisit pour loi à priori sur p une loi $B(\alpha,\beta)$ quelconque ?

Exercice 2

On considère un échantillon de taille n de la loi $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, la variance σ^2 est supposée connue. Pour estimer le paramètre $g(\theta) = \theta^2$, on considère l'estimateur $S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \sigma^2$.

a) Quel est le biais et le risque de S ?

b) Déterminer l'espérance conditionnelle $E(S|\overline{X})$.

c) Calculer le biais et le risque associé à $E(S|\overline{X})$. Que constate-t'on ?

Exercice 3 *Modèle exponentiel canonique*

Montrer que deux mesures positives sur $\mathbb{R}^d$ μ_1 et μ_2 engendrent une même famille exponentielle canonique si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}^d$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) = \exp(< a, x > +b).$$

En déduire qu'une famille exponentielle canonique est engendrée par n'importe quel élément qui la compose.

Exercice 4 *Modèle exponentiel*

Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre inconnu.

a) Écrire le modèle statistique associé.

b) Montrer que la loi de X est dans une famille exponentielle canonique. Quel est le paramètre naturel ?

c) Quelle est la densité de la variable X tronquée, notée Y, lorsque l'on retire la valeur 0.

d) Montrer que la loi de Y décrit encore une famille exponentielle canonique.

e) En déduire l'espérance et la variance de Y.

Exercice 5 *Modèle exponentiel*

Soit X une v.a. réelle de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ inconnu.

a) Écrire le modèle statistique associé.

b) Montrer que la loi de X est dans une famille exponentielle canonique. Quel est le paramètre naturel ?

c) On considère $Y = X^2$. Quelle est la loi de Y. Le modèle est-il toujours exponentiel ? Quel est le paramètre naturel ?

Exercice 6 *Information de Fisher*

Calculer l'information de Fisher dans les modèles statistiques suivants :

a) une loi de Poisson de paramètre λ : $\mathbb{P}(\{X = k\}) = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$ pour $k \in \mathbb{N}$.

b) une loi de Pareto de paramètres $\alpha > 1$ et $\theta > 0$ de densité : $f(x) = \frac{\alpha-1}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha \mathbb{1}_{x\geq\theta}$.

c) que dire du cas de la loi uniforme sur $[0,\theta]$ avec $\theta > 0$?