MTH2302 Probabilités et méthodes statistiques

VARIABLES ALÉATOIRES à 1 dimension

- définition
- fonction de répartition
- variable aléatoire discrète
- variable aléatoire continue
- moyenne - variance - écart type
- espérance mathématique

TRANSFORMATION VARIABLE ALÉATOIRE $Y = \varphi(X)$

- discrète à discrète
- continue à continue: transformation générale
- continue à continue: transformation monotone
- continue à discrète

Bernard CLÉMENT, PhD

Formulaire : variables aléatoires

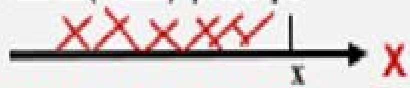
E : expérience aléatoire.. S = { o1,o2,...oi,..,. } : espace échantillonnal associé

X : variable aléatoire = fonction de S dans les nombres réels (R)

Fonction de répartition F_X

X variable aléatoire   x une valeur (réelle) prise par X

Événement : $\{ X \le x \}$

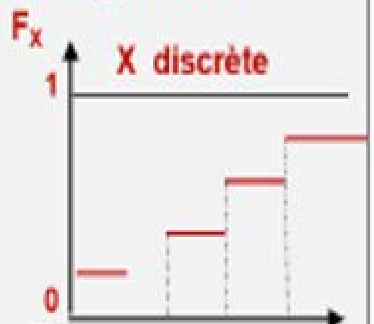


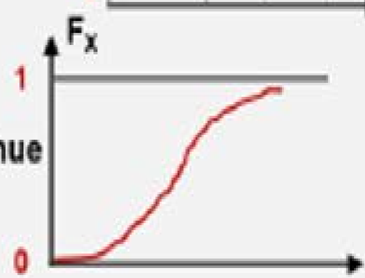
$F_X(x) = P_X(X \le x)$: fonction de répartition

propriétés

1. $0 \le F_X(x) \le 1$
2. $x \longrightarrow -\infty \quad F_X(x) \longrightarrow 0$

   $x \longrightarrow \infty \quad F_X(x) \longrightarrow 1$
3. $F_X(x)$ non décroissante
4. $F_X(x)$ continue à droite





X : variable discrète

nombre fini ou dénombrable de valeurs prises généralement entières avec probabilité non nulle

fonction de masse

$p_X(x) = \text{Prob}(X = x)$

$p_X(x) \ge 0$

fonction de répartition

$$F_X(x) = \sum_{u \le x} p_X(x)$$

moyenne = $E(X) = \mu = \sum x\, p_X(x)$

variance = $Var(X) = \sigma^2$

$= \sum (x - \mu)^2\, p_X(x)$

écart-type = $ET(X) = \sigma = (VAR(X))^{0,5}$

Formulaire : variables aléatoires

X : variable continue

valeurs prises sur continuum réel avec probabilité 0 pour toute valeur spécifique

$$P_X(X=x) = \lim_{\Delta x \to 0}[F_X(x+\Delta x) - F_X(x)] = 0$$

fonction de répartition F

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

densité de probabilité f

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$$

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{R_X} f_X(x)\,dx = 1$$

calcul de probabilité

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

moyenne

$$E(X) = \int_{\infty}^{x} x f_X(t)\,dt = \mu$$

variance

$$VAR[X] = \int^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Espérance mathématique

E [h(X)] = $\sum$ h(x) p_X(x) X discrète

= $\int$ h(x) f_x(x)dx X continue

E (a + bX) = a + b E(X)

Var (a + bX) = b^2 var(X)

ET (a + bX) = |b| ET(X)

Variable centrée-réduite

Z = (X – E(X)) / ET(X)

Alors E (Z) = 0 ET (Z) = 1

Transformation

$R_X \longrightarrow R_Y$ Y = φ (X)

cas : X discrète Y discrète

$$p_Y(y_j) = P_Y(Y=y_j) = \sum_{x_{i_k} \in \Omega_j} P_X(x_{i_k})$$

cas : X continue Y continue

$$f_Y(y) = f_X(x) \bullet \left|\frac{dx}{dy}\right|$$

x = φ^{-1} (y)

Définition : variable aléatoire

E : expérience aléatoire S : espace échantillonnal associé

X fonction de S dans les nombres réels (R)

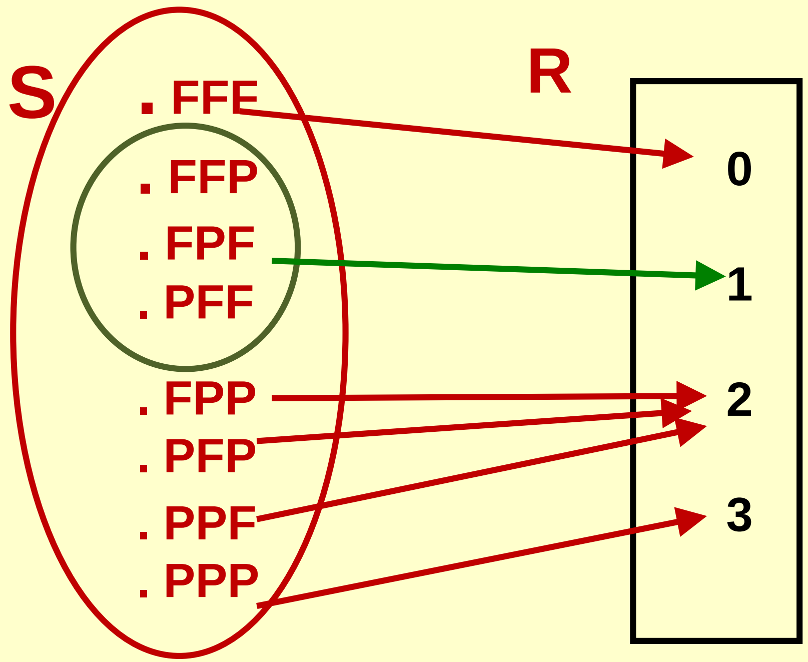
X est une variable aléatoire ; X(o) est un nombre réel

Exemple : lancement d'une pièce de monnaie 3 fois

X = nombre de fois « P I L E » X = 0, 1, 2, 3

F : Face

P : Pile



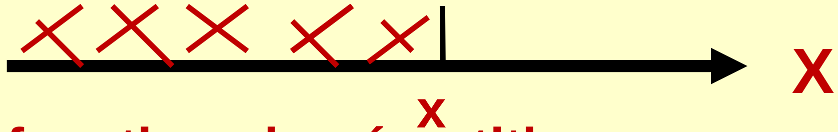
Les probabilités sur S se transportent sur R

Bernard CLÉMENT, PhD

Fonction de répartition F_X

X une variable aléatoire x une valeur (réelle) prise par X

Événement : $\{ X \leq x \}$

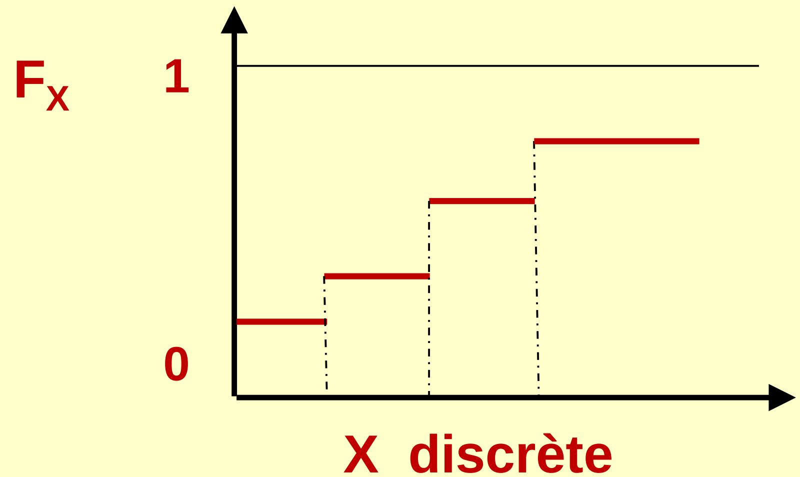


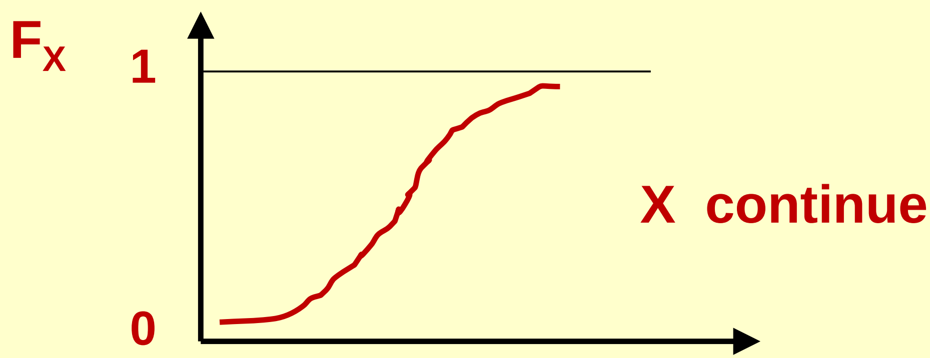
$F_X(x) = P_X(X \leq x)$: fonction de répartition

propriétés

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
2. $x \longrightarrow -\infty \quad F_X(x) \longrightarrow 0$

   $x \longrightarrow \infty \quad F_X(x) \longrightarrow 1$
3. $F_X(x)$ non décroissante
4. $F_X(x)$ continue à droite





VARIABLE ALÉATOIRE DISCRÈTE

X est une variable discrète si elle prend un nombre fini ou infini de valeurs distinctes généralement des entiers 0, 1, 2, 3, 4, …

Exemples (comptages)

- nombre de défauts de surface ;
- nombre de versions d'un dessin de définition pendant une année;
- nombre de pièces non conformes dans un lot de 500 ;
- nombre de pièces en attente devant une machine;

Fonction de masse $p_X(x) = P_X(X = x)$

$p_X(x) \geq 0$

Fonction de répartition $F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u)$

Distributions importantes - Bernouilli - Binomiale - Géometrique

- Poisson - Hypergéométrique

étudiées au chapitre 5

Exemple variable discrète : loi binomiale

essais de Bernoulli : expérience avec 2 dénouements possibles
SUCCÈS ÉCHEC

Prob(SUCCÈS) = θ Prob(ÉCHEC) = $1 - \theta$ $0 \leq \theta \leq 1$

observation (échantillonnage) d'une suite de n essais

n : taille de l'échantillon

X : nombre de succès dans une suite de n essais

valeurs possibles de X x = 0, 1, 2,…, n

X est une variable binomiale notation X~bin(n,θ)

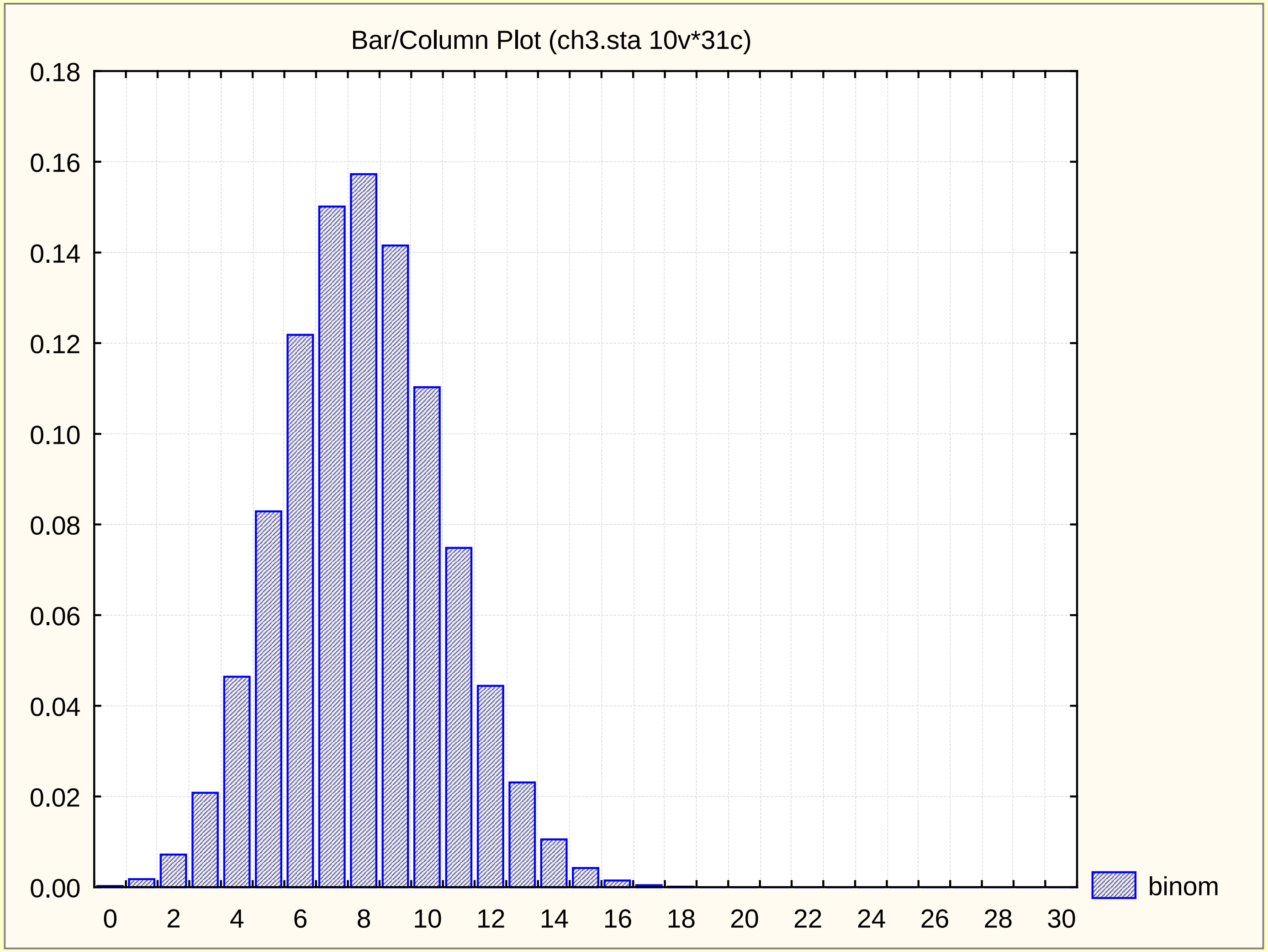
$$p_X(x) = [n! / x!\,(n-x)!]\ \theta^{x} (1-\theta)^{n-x} \qquad x = 0, 1, 2, .., n$$

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{k=x} [n! / k!\,(n-k)!]\ \theta^{k} (1-\theta)^{n-k} \qquad x = 0, 1, 2, .., n$$

étude détaillée : chapitre 5

Exemple : variable aléatoire discrète

distribution binomiale n = 30 θ = 0,3



moyenne - variance - écart type

Moyenne : $E[X] = \mu = \sum x \, p_X(x)$

premier moment par rapport à l'origine – centre de masse

Exemple : $X \sim \text{bin}(n, \theta)$

$E[X] = n\theta$

$n = 30 \quad \theta = 0{,}3 \qquad E[X] = 9$

Variance : $Var[X] = \sigma^2 = \sum (x - \mu)^2 p_X(x) = \sum x^2 p_X(x) - \mu^2$

Exemple : $X \sim \text{bin}(n, \theta)$

$\sigma^2 = n\theta(1 - \theta)$

$n = 30 \quad \theta = 0{,}3 \qquad Var[X] = \sigma^2 = 6{,}3$

Écart type : $ET[X] = \sigma = \sqrt{Var[X]}$

Exemple : $X \sim \text{bin}(n = 30, \theta = 0{,}3) \qquad ET[X] = \sigma = 2{,}51$

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

L'espace de la variable aléatoire X est un intervalle sur les nombres réels

sa fonction de répartition $F_X(x)$ est dérivable

La dérivée de $F_X(x)$ notée f_X est la densité de X

Exemples (mesures)

- **volume d'un réservoir d'eau**
- **temps requis pour finaliser une conception**
- **tension d'un câble métallique**

VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE

$$P_X(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[F_X(x + \Delta x) - F_X(x) \right] = 0$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x)$$

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

$$P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

$$f_X(x) \ge 0$$

$$\int_{R_X} f_X(x)\, dx = 1$$

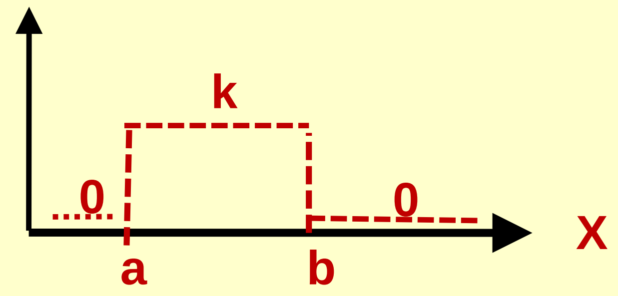
Moyenne et Variance

$$E(X) = \int_{\infty}^{x} x f_X(t)\, dt = \mu$$

$$VAR[X] = \int_{\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_{\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \mu^2$$

<u>Exemple</u> : distribution uniforme

(équiprobabilité)



$f_X(x) = 0 \quad$ si $\quad X \le a \quad$ ou $\quad X \ge b$

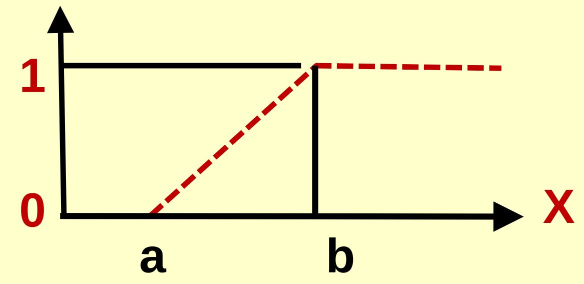
$= k \quad$ si $\quad a \le X \le b \qquad k = ?$

$k = 1 / (b - a) \qquad E(X) = (a + b) / 2 \qquad Var(X) = (b - a)^2 / 12$

$F_X(x) = 0 \qquad$ si $\quad X \le a$

$= (x - a) / (b - a) \qquad$ si $\quad a \le X \le b$

$= 1 \qquad$ si $\quad X \ge b$



<u>Application</u> générateurs de nombres (pseudo) aléatoires de la loi uniforme

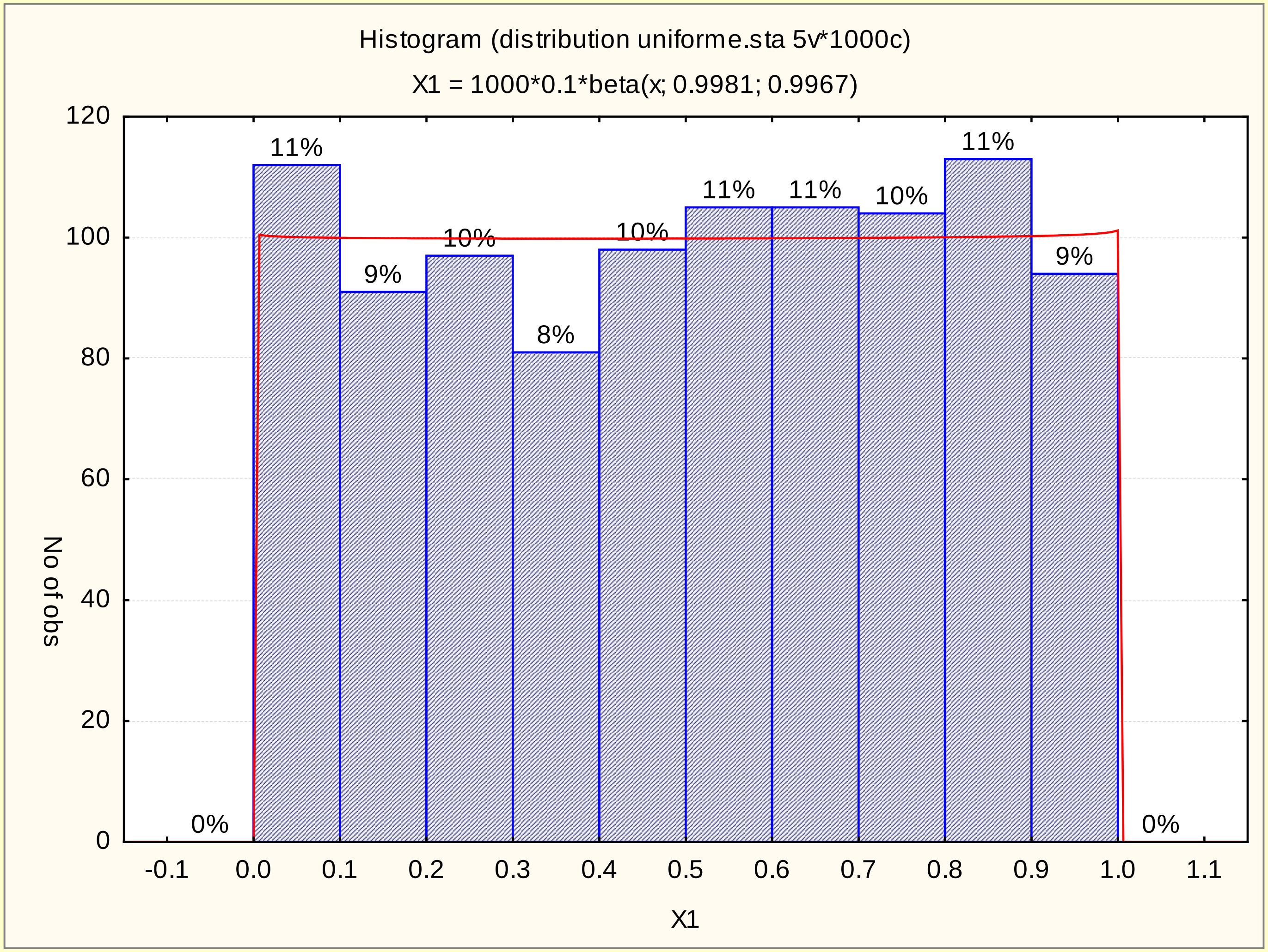
méthode linéaire congruente : $I_{i+1} = (a I_i + b) \bmod m \qquad i = 0, 1, 2,\ldots$

À choisir : a, b, m , I_0 (semence) ; $\quad u_i = I_i / m \qquad 0 \le u_i \le 1$

employé pour la SIMULATION : *STATISTICA* fonction Rnd

Exemple : simulation 1 000 observations

distribution uniforme fonction RnD de *STATISTICA*



Espérance mathématique

X va discrète $\quad$ $p_X(x)$: fonction de masse de X

X va continue $\quad$ $f_x(x)$: densité de X

h fonction de R dans R $\quad$ $h : R \longrightarrow R$

espérance mathématique de h E(h(X))

$$E[h(X)] = \sum h(x)\, p_X(x) \qquad \text{si X est discrète}$$

$$= \int h(x)\, f_x(x)dx \qquad \text{si X est continue}$$

Cas particuliers de h

$h(X) = X$ $\quad$ moyenne μ

$h(X) = X^2$ $\quad$ 2 ième moment par rapport à l'origine 0

$h(X) = (X - \mu)^2$ $\quad$ variance

$h(X) = X^k$ $\quad$ k - ième moment par rapport à l'origine

$h(X) = (X - \mu)^k$ $\quad$ k – ième moment par rapport à la moyenne μ

Espérance mathématique

Propriétés

$$E(a + bX) = a + b\,E(X)$$

$$Var(a + bX) = b^2\,var(X)$$

$$ET(a + bX) = |b|\,ET(X)$$

Variable centrée-réduite Z

$$Z = (X - E(X)) \,/\, ET(X)$$

Alors $E(Z) = 0$

$ET(Z) = 1$

Espérance mathématique

Exemple : soumission pour la réalisation d'un travail d'ingénierie

X v.a. « nombre de jours requis pour le travail »

Vous estimez vos « probabilités »

x	< 3	3	4	5	6	total
p(x)	0	1/8	4/8	2/8	1/8	1

Y = profit net = φ (X) dépend du nombre de jours X pour réaliser le travail

x	3	4	5	6
Y = φ (x)	10K$	3K$	0,7K$	-1,5K$

ça vaut-il la peine ?

Espérance mathématique

Exemple : soumission pour la réalisation d'un travail d'ingénierie

X v.a. « nombre de jours requis pour le travail »

Vous estimez vos « probabilités »

x	< 3	3	4	5	6	total
p(x)	0	1/8	4/8	2/8	1/8	1

Y = profit net = φ (X) dépend du nombre de jours X faire le travail

x	3	4	5	6
Y = φ (x)	10K$	3K$	0,7K$	-1,5K$

Profit net moyen = ?

E(Y) = 10K$ *1/8 + 3K$ * 4/8 + 0,7K$ * 2/8 + (-1,5K$) * 1/8 = 2,73K$

Critère de décision basé sur profit net moyen

si E(profit net Y) = profit net moyen ≥ 0 on accepte le travail

Exemple - vous achetez des billets du spectacle des «RS» à 40,00$ dans l'espoir de les revendre 70,00$ le soir du spectacle

- votre estimation de la demande billets X

nombre billets x	23	24	25	26	27	28	29	30
probabilité p(x)	0,02	0,04	0,08	0,16	0,32	0,18	0,12	0,08

combien de billets S = ? stocker pour minimiser les pertes (profit max)

- perte = 40$/billet si vous stockez trop de billets: $x \leq S$
- perte = 30$/billet si vous ne stockez pas assez de billets: $x \geq S+1$

Fonction de perte L (x, s)

$L(x, s) = 40\,(s - x)$ si $23 \leq x \leq s$ stock excessif

$L(x, s) = (70 - 40)\,(x - s)$ si $s+1 \leq x \leq 30$ stock manquant

perte moyenne E(L)

$$E[L(X,s)] = \sum_{x=23}^{s} 40(s-x)\; p_X(x) + \sum_{x=s+1}^{30} 30\,(x-s)\; p_X(x)$$

Quelle valeur de S minimise E(L) ?

Exemple suite

S	$\sum 40(s - x)p(x)$	$\sum 30(x - s)p(x)$	E [L(X , s)]	
23	0,00	124,20	124,20	
24	0,80	94,80	95,60	
25	3,20	66,60	69,90	
26	8,80	40,80	49,60	
27	20,80	19,20	40,60	minimum
28	45,60	6,20	51,60	
29	77,60	0,00	77,60	
30	114,40	0,00	114,40	

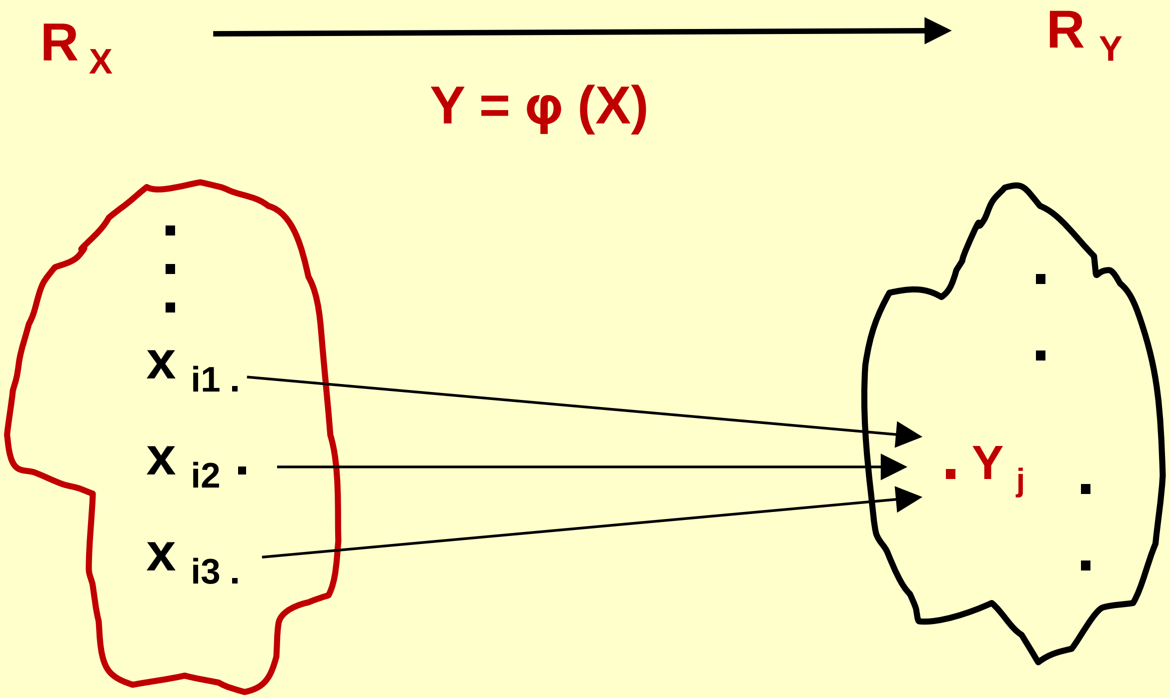
profit net réalisé avec S = 27 : 27*30$ = 810$

Si on a une nouvelle distribution de probabilité

x	23	24	25	26	27	28	29	30
prob	0,30	0,20	0,15	0,12	0,10	0,08	0,04	0,01

solution optimale devient S = 24

Fonction d'une variable aléatoire discrète



$$p_Y(y_j) = P_Y(Y = y_j) = \sum_{x_{i_k} \in \Omega_j} P_X(x_{i_k})$$

Exemple 1 : fonction d'une variable aléatoire discrète

X : nombre de pannes en une semaine

x	0	1	2	3	4
$p_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

Y : coût d'un service de dépannage

coût fixe 500$ + 200$ par panne

Déterminer

- **masse de probabilité de Y : $p_Y(y)$**
- **moyenne et écart type de Y**

Exemple 1 : fonction d'une variable aléatoire discrète

X : nombre de pannes en une semaine

Y = 500 + 200*X : coût ($) par semaine

y	500	700	900	1100	1300
$p_Y(y)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

Moyenne de Y = E(Y)

$= 500*(4/9) + 700*(2/9) + 900*(1/9) + 1100*(1/9) + 1300*(1/9)$

$= 6700 / 9 = 744,44$

Écart type de Y

$= [\ E(Y^2) - (E(Y))^2\ ]^{0.5} = 279,32$

Exemple 2 : fonction d'une variable aléatoire discrète

X : variable aléatoire discrète

x	-2	-1	0	1	2
$p_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

$$Y = X^2$$

Déterminer

- masse de probabilité de Y : $p_Y(y)$
- moyenne et écart type de Y

Exemple 2 : fonction d'une variable aléatoire discrète

$Y = X^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4
$p_X(x)$	4/9	2/9	1/9	1/9	1/9

$p_Y(Y=0) = p_X(X= 0) = 1/9$

$p_Y(Y=1) = p_X(X= -1) + p_X(X = 1) = 2/9 + 1/9 = 3/9$

$p_Y(Y=4) = p_X(X= -2) + p_X(X = 2) = 4/9 + 1/9 = 5/9$

y	0	1	4
$p_Y(y)$	1/9	3/9	5/9

moyenne de Y = E(Y) = 0*(1/9) + 1*(3/9) + 4*(5/9) = 23/9

écart type de Y = ET(Y) = $[\ E(Y^2) - (\ E(Y))^2\ ]^{0.5}$

$= [\ 0^2 *(1/9) + 1^2 *(3/9) + 4^2*(5/9) - (23/9)^2\ ]^{0.5} = 1,64$

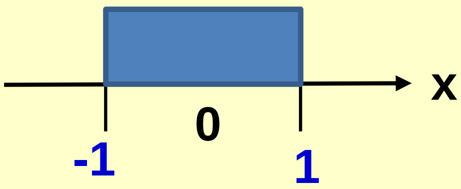
Fonction continue d'une variable aléatoire continue

cas : transformation non monotone

Exemple 3 : X variable aléatoire continue de

densité f_X $\quad f_X(x) = \frac{1}{2}$ si $-1 \leq x \leq 1$

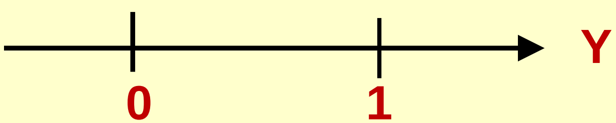
$\quad\quad = 0$ sinon



$$F_X(x) = \text{Prob}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ (x+1)/2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

densité de $Y = X^2$

$0 < y < 1$



Fonction de répartition de Y : $F_Y(y) = \text{Prob}(Y \leq y) = \text{Prob}(X^2 \leq y)$

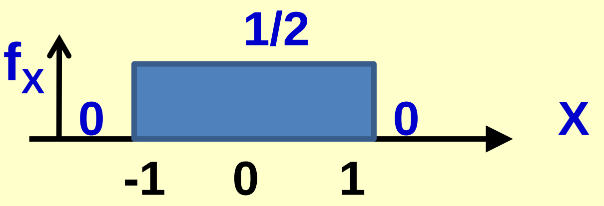
$$= \text{Prob}(-y^{0.5} \leq X \leq y^{0.5}) = F_X(y^{0.5}) - F_X(-y^{0.5})$$

$$= (y^{0.5} + 1)/2 - (-y^{0.5} + 1)/2 = y^{0.5}$$

Fonction continue d'une variable aléatoire continue

cas : transformation non monotone

Exemple 3 : suite densité de $Y = X^2$



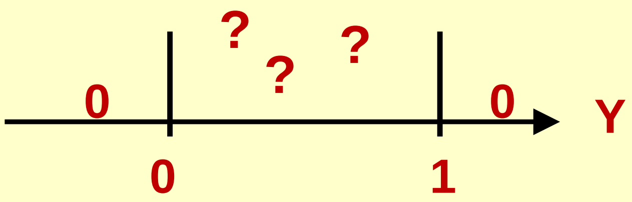
Fonction de répartition de Y

$F_Y(y) = \text{Prob}(\,Y \leq y) = \text{Prob}\,(\,X^2 \leq y)$

$= \text{Prob}(\,-\,y^{\,0.5} \leq X \leq y^{\,0.5}\,)$

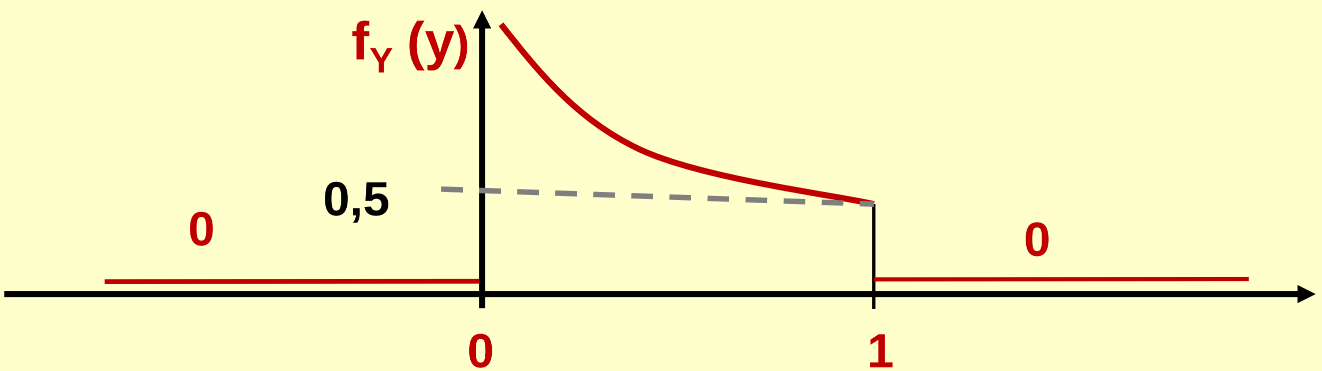
$= F_X(\,y^{\,0.5}\,) - F_X\,(\,-\,y^{\,0.5}\,)$

$= (\,y^{\,0.5} + 1)\,/\,2 \;-\; (-y^{\,0.5} + 1)\,/\,2 \;=\; y^{\,0.5}$



densité de Y : $f_Y\,(y) = (d/dy)\;F_Y(y) = 0{,}5\;y^{\,-\,0.5}$ $\qquad 0 \leq y \leq 1$

$= 0$ ailleurs



Fonction continue d'une variable aléatoire continue :

cas d'une transformation monotone

X v.a.c. densité f_x φ fonction continue $Y = \varphi(X)$ Y est une v.a.c

Densité f_Y = ?   **Pour trouver la densité il faut :**

1. Obtenir $F_Y(y) = P(Y \leq y)$ par l'événement de R_X équivalent à $(Y \leq y)$ dans R_y
2. Dériver $F_Y(y)$ par rapport à y pour obtenir la fonction de densité f_y
3. Trouver l'espace image de cette v.a.c.

THÉORÈME Si X est une v.a.c. de densité f_x telle que $f_x > 0$ pour $a < x < b$ et $y = \varphi(x)$ est une **fonction continue strictement monotone,** alors la v.a.c $Y = \varphi(X)$ possède une densité f_Y

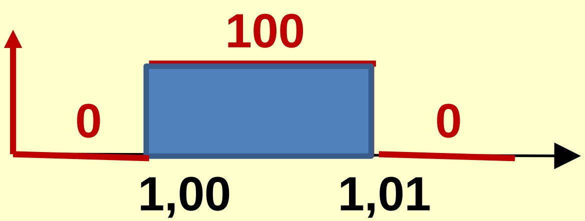
$$f_Y(y) = f_X(x) \bullet \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

avec $x = \varphi^{-1}(y)$ exprimé en terme de y

Fonction continue monotone d'une variable continue

Exemple 4 : X diamètre d'un fil - distribution uniforme intervalle 1,00 à 1,01

$f_X(x) = 100 \quad 1{,}00 \le x \le 1{,}01$
$\quad = 0 \quad$ autrement



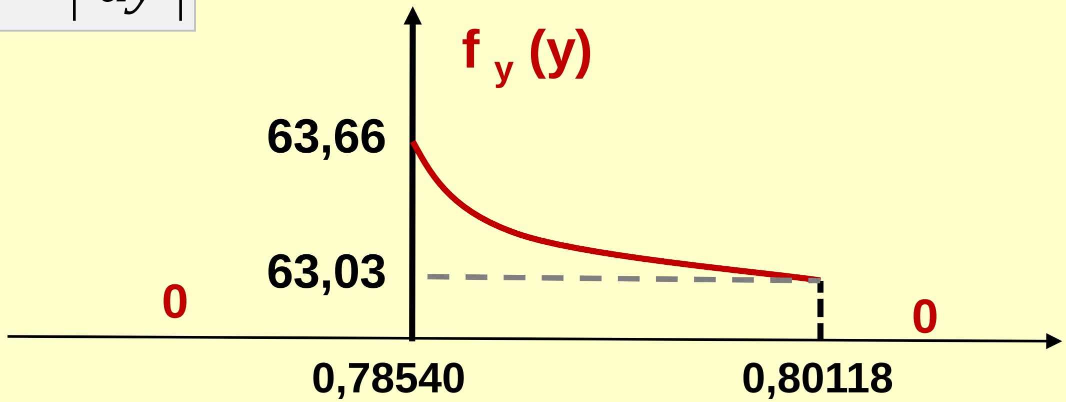
Y = aire de la section = $\pi (X/2)^2 = 0{,}25\, \pi X^2 = 0{,}7854\, X^2$

$y = 0{,}78540$ si $x = 1{,}00$ $\quad$ $y = 0{,}80118$ si $x = 1{,}01$

$X = 1{,}2732\, Y^{0,5}$ $\quad$ $dx/dy = 0{,}5642\, y^{-0,5}$

$$f_Y(y) = f_X(x) \bullet \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

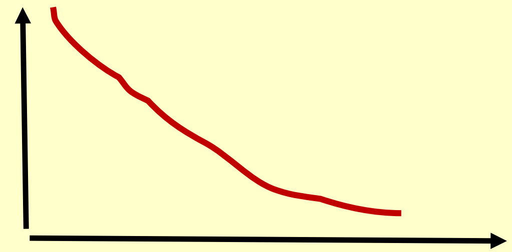
$$f_y(y) = 100\,(0{,}5642\, y^{-0,5}) = 56{,}42\, y^{-0,5}$$



Exemple 5 : transformation continue à discrète

loi exponentielle $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$

$= 0 \quad x < 0$



$$E[X] = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\, dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 1/\lambda^2$$

Le temps X jusqu'à la défaillance (ex, tube à rayons cathodiques)
X durée vie suit une loi exponentielle, λ taux de défaillance

Posons : Y variable Bernoulli définie par le fait que X excède ou non sa durée moyenne $1/\lambda$

$$Y = 0 \quad \text{si } X \leq 1/\lambda$$
$$= 1 \quad \text{si } X > 1/\lambda$$

Exemple 5 : (suite) transformation var. continue à var. discrète

probabilités de Y

$$p_Y(0) = \int_0^{1/\lambda} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\Big|_0^{1/\lambda} = 1 - e^{-1} \approx 0.6321$$

$$p_Y(1) = \int_{1/\lambda}^{\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, dt = -e^{-\lambda t}\Big|_{1/\lambda}^{\infty} = e^{-1} \approx 0.3679$$

Ne dépend pas de λ